

Testowanie zmiany strukturalnej w modelu VEC

Emilia Gosińska*

Nadesłany: 27 sierpnia 2015 r. Zaakceptowany: 15 października 2015 r.

Streszczenie

Wprowadzenie do przestrzeni kointegrującej zmiennej zero-jedynkowej charakteryzującej zmianę strukturalną w okresie t jest równoważne przyjęciu, że w procesie generującym dane zmiana strukturalna nastąpiła w okresie $t - 1$. Jednocześnie, jeśli to zmiana strukturalna jest przyczyną wprowadzenia zmiennej zero-jedynkowej do przestrzeni kointegrującej, to odpowiednie zmienne zero-jedynkowe muszą się znaleźć także poza przestrzenią kointegrującą.

Aby przetestować zmianę wyrazu wolnego w składowej deterministycznej, zastosowano statystykę Walda. Wartości krytyczne i moc testu zostały wyznaczone symulacyjnie w zależności od rzędu kointegracji, liczby zmiennych endogenicznych, wielkości zmiany strukturalnej, momentu wystąpienia zmiany strukturalnej oraz rozkładu składników losowych (normalnego i t -Studenta). Moc testu zmiany wyrazu wolnego zależy głównie od wielkości zaburzenia oraz liczebności próby.

Model VECM ze zmianą wyrazu wolnego został wykorzystany do modelowania kursu walutowego złoty/euro. W systemie zidentyfikowano dwa wektory kointegrujące, z których jeden można interpretować jako długookresowe równanie kursu walutowego złoty/euro. Drugi wektor kointegrujący jest równaniem krajowych, realnych, długookresowych stóp procentowych uwzględniających ryzyko. W celu określenia momentu wystąpienia zaburzenia w składowej deterministycznej procesie generującego dane wykorzystano statystykę $\sup W_{ALD}$.

Słowa kluczowe: zmiana strukturalna, VECM, test Walda, testowanie występowania zmiany strukturalnej, modelowanie kursu walutowego złoty/euro

JEL: C1, C12, C32

* Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Modeli i Prognoz Ekonometrycznych;
e-mail: emfemj@uni.lodz.pl.

1. Wstęp

Gospodarki podlegają transformacjom, które niejednokrotnie mają gwałtowny charakter. Jest to skutkiem rozwoju gospodarczego, ale również przeprowadzanych reform, polityki ekonomicznej oraz wydarzeń o charakterze zewnętrznym (np. wpływ kryzysu greckiego na gospodarki europejskie). Gospodarka Polski podlegała transformacjom, które w ciągu ostatnich 30 lat miały znaczenie fundamentalne. Należy do nich, po pierwsze, zmiana ustroju, polegająca na przejściu od gospodarki centralnie planowanej do gospodarki rynkowej. Kolejną była zmiana reżimu kursu walutowego, a następną – przystąpienie do Unii Europejskiej. W ostatnim okresie zaburzenia struktury są utożsamiane ze skutkami kryzysu finansowego. Zmiany strukturalne są istotnym elementem rzeczywistości ekonomicznej, gdyż mają wpływ na funkcjonowanie mechanizmów ekonomicznych, co powoduje konieczność ich uwzględnienia w modelach ekonometrycznych. Pojawienie się zaburzeń struktury sprawia, że standardowo stosowane metody weryfikacji hipotez nie dają satysfakcjonujących rezultatów i wymagają odpowiednich modyfikacji. Ponadto nieuwzględnienie w modelu istotnej zmiany strukturalnej pociąga za sobą błąd specyfikacji.

W przypadku modelowania zmiennych ekonomicznych generowanych przez niestacjonarne procesy stochastyczne wykorzystywany jest model VAR z restrykcją kointegracji – CVAR (Johansen 1995; Welfe 2009). W modelach VAR zaburzenia struktury ujawniają się jako niezwykle silne szoki, które powodują, że składniki losowe nie pochodzą z rozkładów normalnych. Zignorowanie tego problemu ma zatem poważne konsekwencje dla wnioskowania statystycznego. Proces generujący dane można przedstawić jako sumę składowej stochastycznej i deterministycznej (Lütkepohl 2005). Pojawienie się zaburzeń struktury może się wówczas objawiać odpowiednim uzmiennieniem parametrów w części deterministycznej, a końcowa postać modelu VEC ulega odpowiednim modyfikacjom.

W przypadku modelowania z uwzględnieniem zmian strukturalnych ważnym elementem wnioskowania statystycznego jest testowanie występowania zmiany strukturalnej. W wielowymiarowym modelu korekty błędem o standardowej postaci (Johansen 1995) testowanie występowania zmiany strukturalnej było rozważane przez kilku autorów (zob. porównanie metod u Perrona 2006). Z badań wynika, że do testowania zmiany w wyrazie wolnym i trendzie w przypadku znanego momentu przełączenia można wykorzystać statystykę LR (Johansen 1995). Z kolei w przypadku nieznanego momentu zaburzenia można zastosować statystykę LM oraz jej modyfikacje: Sup LM, Mean LM i Exp LM (Seo 1998). Do testowania stabilności parametrów modelu wykorzystuje się wartości własne wyznaczone na podstawie estymacji rekursywnej (Hansen, Johansen 1999).

Jeśli proces generujący dane jest sumą składowej deterministycznej i stochastycznej (Lütkepohl 2005), to zmiana strukturalna może wystąpić w każdej z nich, co wymaga oddzielnego testowania. Jeśli składowa deterministyczna procesu generującego dane zawiera wyraz wolny, wówczas zmiana strukturalna może być reprezentowana przez uzmiennienie wyrazu wolnego. Do testowania zmiany strukturalnej składowej deterministycznej w znanym okresie zaproponowano statystykę Walda, natomiast w przypadku nieznanego momentu zaburzenia statystykę supWALD.

Cel pracy sformułowano następująco. Po pierwsze, wyprowadzono końcową postać modelu VEC przy założeniu, że zmiana strukturalna następuje w składowej deterministycznej procesu generującego dane. Po drugie, opracowano statystykę służącą do testowania występowania zmiany strukturalnej składowej deterministycznej procesu generującego dane. Po trzecie, zastosowano model VEC ze zmianą strukturalną składowej deterministycznej do modelowania kursu walutowego złoty/euro.

2. Wektorowy model korekty błędem ze zmianą strukturalną w części deterministycznej DGP

Niech $\mathbf{y}_t = [y_{1t} \dots y_{Mt}]^T$ reprezentuje wektor M zmiennych zintegrowanych w stopniu pierwszym. Jeśli wymiar przestrzeni kointegrującej wynosi $R \in (0, M)$, to dla modelu VAR $\Pi(L)\mathbf{y}_t = \xi_t$, gdzie $\xi_t = [\xi_{1t} \dots \xi_{Mt}]^T$ jest wektorem białoszumowych składników losowych o wymiarach $M \times 1$, istnieje postać VECM (por. Johansen 1995; Majsterek 2008):

$$\Delta \mathbf{y}_t = \Pi \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{s=1}^{S-1} \Gamma_s \Delta \mathbf{y}_{t-s} + \xi_t \quad (1)$$

gdzie:

$$\Pi = \sum_{s=1}^S \Pi_s - \mathbf{I},$$

$$\Gamma_i = -\sum_{s=i+1}^S \Pi_s = -(\Pi_{i+1} + \Pi_{i+2} + \dots + \Pi_S),$$

$$\Pi = \mathbf{A}\mathbf{B}^T.$$

Macierze $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}$ o wymiarach $M \times R$ mają standardową interpretację.

Po wprowadzeniu do powyższego modelu wyrazu wolnego i trendu otrzymamy pięć różnych postaci tego modelu, wynikających z restrykcji nakładanych na parametry (por. Juselius 2006, s. 99–100). Interpretacja zmiennych zero-jedynkowych, które mogą znaleźć się w przestrzeni kointegrującej i poza nią, napotyka jednak poważne trudności, zwłaszcza jeśli ich obecność miałaby wynikać ze zmian strukturalnych, a nie z obserwacji nietypowych.

W celu znalezienia właściwej interpretacji założmy, że proces generujący dane (ang. *data generating process*, DGP) zawiera składową stochastyczną i składową deterministyczną; podobnie czyni Lütkepohl (2005, s. 256):

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{H}\mathbf{d}_t \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{y}_t = [y_{1t} \dots y_{Mt}]^T$ – wektor M zmiennych zintegrowanych w stopniu pierwszym, o wymiarach $M \times 1$, por. (1),

$\mathbf{d}_t = [d_{1t} \dots d_{Zt}]^T$ – wektor Z zmiennych deterministycznych, o wymiarach $Z \times 1$,

$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \dots \quad \mathbf{h}_Z]$ – macierz o wymiarach $M \times Z$ parametrów związanych ze zmiennymi deterministycznymi, $\mathbf{h}_z = [h_{z1} \dots h_{zM}]^T$,

$m = 1, \dots, M$, $z = 1, \dots, Z$.

Występowanie zmiany strukturalnej może zatem oznaczać zmianę części deterministycznej lub części stochastycznej procesu generującego dane. W zależności od charakteru zmiany otrzymujemy zasadniczo odmienne modele VEC.

Przyjmijmy, że zmiana strukturalna wpływa wyłącznie na składową deterministyczną procesu generującego dane. Jeśli w składowej deterministycznej występuje tylko wyraz wolny, a efekt zmiany strukturalnej w okresie t_0 można uwzględnić przez wprowadzenie odpowiedniej zmiennej zero-jedynkowej, to $\mathbf{d}_t = [1 \quad u_t]^T$, a proces generujący dane ma postać:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_3 u_t \quad (3)$$

$$\text{gdzie } u_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq t_0 \\ 0 & \text{dla } t < t_0 \end{cases}$$

Taka definicja zmiennej u_t jest równoważna założeniu, że zachodzi tylko jedna zmiana strukturalna w znanym okresie t_0 . Założenie to można uogólnić na przypadek wystąpienia wielu zmian strukturalnych.

Mnożąc lewostronnie (3) przez $\Pi(L)$, gdzie $\Pi(L) = \mathbf{I} - L\Pi_1 - L^2\Pi_2 - \dots - L^S\Pi_S$, a Π_s ($s = 1, \dots, S$) oznaczają macierze parametrów o wymiarach $M \times M$, otrzymujemy:

$$\Pi(L)\mathbf{v}_t = \Pi(L)\mathbf{y}_t + \Pi(L)\mathbf{h}_1 + \Pi(L)\mathbf{h}_3 u_t \quad (4)$$

Składniki deterministyczne występujące po prawej stronie równania (4) równają się odpowiednio (por. Gosińska 2009):

$$\Pi(L)\mathbf{h}_1 = (\mathbf{I} - L\Pi_1 - L^2\Pi_2 - \dots - L^S\Pi_S)\mathbf{h}_1 = -\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{h}_1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi(L)\mathbf{h}_3 u_t &= \mathbf{h}_3 u_t - \Pi_1 \mathbf{h}_3 u_{t-1} - \Pi_2 \mathbf{h}_3 u_{t-2} - \Pi_3 \mathbf{h}_3 u_{t-3} - \dots - \Pi_S \mathbf{h}_3 u_{t-S} = \\ &= \mathbf{h}_3 u_t - \mathbf{h}_3 u_{t-1} + \mathbf{h}_3 u_{t-1} - \Pi_1 \mathbf{h}_3 u_{t-1} - \Pi_2 \mathbf{h}_3 u_{t-2} + \\ &\quad + \Pi_2 \mathbf{h}_3 u_{t-1} - \Pi_2 \mathbf{h}_3 u_{t-1} - \Pi_3 \mathbf{h}_3 u_{t-3} - \dots - \Pi_S \mathbf{h}_3 u_{t-S} = \\ &= \mathbf{h}_3 \Delta u_t + (\mathbf{I} - \Pi_1 - \Pi_2) \mathbf{h}_3 u_{t-1} + \Pi_2 \mathbf{h}_3 \Delta u_{t-1} - \Pi_3 \mathbf{h}_3 u_{t-3} - \dots - \Pi_S \mathbf{h}_3 u_{t-S} = \\ &= (\mathbf{I} - \Pi_1 - \Pi_2 - \dots - \Pi_S) \mathbf{h}_3 u_{t-1} + \mathbf{h}_3 \Delta u_t + \Pi_2 \mathbf{h}_3 \Delta u_{t-1} + (\Pi_3 + \dots + \Pi_S) \mathbf{h}_3 u_{t-1} + \\ &\quad - \Pi_3 \mathbf{h}_3 u_{t-3} - \dots - \Pi_S \mathbf{h}_3 u_{t-S} \end{aligned}$$

Dodając i odejmując kolejno $(\Pi_3 + \dots + \Pi_S)\mathbf{h}_3 u_{t-2}$, $(\Pi_4 + \dots + \Pi_S)\mathbf{h}_3 u_{t-3}, \dots, \Pi_S \mathbf{h}_3 u_{t-S+1}$, ostatecznie można zapisać:

$$\Pi(L)\mathbf{h}_3 u_t = -\mathbf{A}\mathbf{B}^T \mathbf{h}_3 u_{t-1} + \mathbf{h}_3 \Delta u_t + \sum_{s=1}^{S-1} (-\Gamma_s) \mathbf{h}_3 \Delta u_{t-s} \quad (6)$$

Po podstawieniu (1), (5) i (6) do (4) otrzymujemy reprezentację modelu VEC z wyrazem wolnym i zmianą wyrazu wolnego:

$$\Delta \mathbf{v}_t = \mathbf{A}[\mathbf{B}^T \mathbf{v}_{t-1} + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_3 u_{t-1}] + \sum_{s=1}^{S-1} \Gamma_s \Delta \mathbf{v}_{t-s} + \sum_{s=0}^{S-1} \mathbf{f}_3^s \Delta u_{t-s} + \xi_t \quad (7)$$

dla $t = S+1, S+2, \dots$,

$$\text{gdzie: } \mathbf{g}_1 = -\mathbf{B}^T \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{g}_3 = -\mathbf{B}^T \mathbf{h}_3, \quad \mathbf{f}_3^s = \begin{cases} \mathbf{h}_3 & \text{dla } s = 0 \\ -\Gamma_s \mathbf{h}_3 & \text{dla } s = 1, 2, \dots, S-1 \end{cases}$$

Zdefiniowanie macierzy:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_3],$$

$$\mathbf{d}_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_{t-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{d}_{t-s} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u_{t-s} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_3^s],$$

gdzie $\mathbf{f}_1$ jest wektorem o wymiarach $M \times 1$,

pozwala zapisać równanie (7) w postaci:

$$\Delta \mathbf{v}_t = \mathbf{A} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{v}_{t-1}^* + \sum_{s=1}^{S-1} \mathbf{\Gamma}_s \Delta \mathbf{v}_{t-s} + \sum_{s=0}^{S-1} \mathbf{F}_s \Delta \mathbf{d}_{t-s} + \xi_t \quad (8)$$

gdzie:

$$\mathbf{v}_{t-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{t-1} \\ \mathbf{d}_{t-1} \end{bmatrix} - \text{wektor o wymiarach } N \times 1, N = M + Z,$$

$\mathbf{B}^{*T} = [\mathbf{B}^T \quad \mathbf{G}]$ – macierz wektorów kointegrujących o wymiarach $R \times N$,

$\mathbf{G}$ – macierz parametrów związanych ze zmiennymi deterministycznymi w przestrzeni kointegrującej, o wymiarach $R \times Z$,

$\mathbf{F}_s$ – macierz parametrów związanych ze zmiennymi deterministycznymi poza przestrzenią kointegrującą, o wymiarach $M \times Z$.

Szczególną postacią modelu (8) jest taka, w której składowa deterministyczna zawiera wyłącznie wyraz wolny. Wówczas $\mathbf{h}_3$ jest wektorem zerowym, co oznacza brak zmiany strukturalnej. Model VEC dla procesu generującego dane: $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{h}_1$ ma postać:

$$\Delta \mathbf{v}_t = \mathbf{A} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{v}_{t-1}^* + \sum_{s=1}^{S-1} \mathbf{\Gamma}_s \Delta \mathbf{v}_{t-s} + \xi_t \quad (9)$$

gdzie:

$$\mathbf{v}_{t-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{*T} = [\mathbf{B}^T \quad \mathbf{g}_1],$$

$$\mathbf{g}_1 = -\mathbf{B}^T \mathbf{h}_1.$$

Restrykcja $\mathbf{g}_1 = -\mathbf{B}^T \mathbf{h}_1$ zapewnia, że wyraz wolny w tym modelu nie generuje trendu liniowego.

Z powyższego wynika, że wprowadzenie do przestrzeni kointegrującej zmiennej zero-jedynkowej w okresie t jest równoważne przyjęciu, iż w procesie generującym dane zmiana strukturalna wystąpiła w okresie $t - 1$. Ponadto jeśli to zmiana strukturalna jest przyczyną wprowadzenia zmiennej zero-jedynkowej do przestrzeni kointegrującej, to odpowiednie zmienne zero-jedynkowe muszą się znaleźć także poza przestrzenią kointegrującą.

3. Testowanie występowania zmiany wyrazu wolnego

Rozważmy postać modelu VEC z wyrazem wolnym i zmianą wyrazu wolnego (por. wzór 7). Testowanie występowania w znanym okresie t_0 zmiany wyrazu wolnego polega na weryfikacji hipotezy: $\mathbf{h}_3 = 0$. Do tego celu można wykorzystać statystykę Walda. Wyznaczenie jej wartości wymaga zastosowania dwustopniowej procedury, w której najpierw estymowane są parametry części stochastycznej przy założeniu rzędu kointegracji R , a następnie parametry części deterministycznej (por. wzór 2). Testy dotyczące występowania zmian strukturalnych zakładają w hipotezie zerowej brak zmiany strukturalnej, a zatem:

$$\begin{aligned} H_0: \mathbf{h}_3 &= 0 \\ H_1: \mathbf{h}_3 &\neq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Zakładając prawdziwość hipotezy zerowej, mamy $\mathbf{h}_3 = 0$. Oznacza to, że wektory parametrów związanych ze zmiennymi, które charakteryzują zmianę strukturalną w przestrzeni kointegrującej, są równe zero ($\mathbf{g}_3 = 0$), jak również wszystkie parametry krótkookresowe związane ze zmienną deterministyczną u_t są równe zero. Dekompozycja wektora parametrów $\mathbf{h}_3$ w kierunku stacjonarnym oraz nie-stacjonarnym wiąże się z następującym układem hipotez:

$$\begin{aligned} H_0: \mathbf{B}^T \mathbf{h}_3 &= 0 \wedge \mathbf{B}_\perp^T \mathbf{h}_3 = 0 \\ H_1: \mathbf{B}^T \mathbf{h}_3 &\neq 0 \vee \mathbf{B}_\perp^T \mathbf{h}_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Proponowany test polega na łącznym sprawdzaniu restrykcji $\mathbf{B}^T \mathbf{h}_3 = 0$ i $\mathbf{B}_\perp^T \mathbf{h}_3 = 0$ za pomocą statystyki Walda. Estymatory $\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{h}}_3$ i $\hat{\mathbf{B}}_\perp^T \hat{\mathbf{h}}_3$ są asymptotycznie niezależne, ponieważ $\hat{\mathbf{B}}_\perp (\hat{\mathbf{B}}_\perp^T \hat{\mathbf{B}}_\perp)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_\perp^T + \hat{\mathbf{B}} (\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{B}})^{-1} \hat{\mathbf{B}}^T = \mathbf{I}$ (por. Sobreira, Nunes 2012). Statystykę Walda dla łącznego testu można zatem zapisać jako sumę statystyk Walda dla każdej z hipotez:

$$WALD = WALD_B + WALD_{B_\perp} \quad (12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} WALD_B &- \text{statystyka Walda dla } H_0: \mathbf{B}^T \mathbf{h}_3 = 0, \\ WALD_{B_\perp} &- \text{statystyka Walda dla } H_0: \mathbf{B}_\perp^T \mathbf{h}_3 = 0. \end{aligned}$$

Wyznaczenie statystyki Walda danej wzorem (12) wymaga estymacji parametrów części deterministycznej w kierunku $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}_\perp$ (por. aneks). Estymatory parametrów związanych ze zmienną zero-jedynkową: $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{B},3}$ i $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{B}_\perp,3}$ (por. aneks), są podstawą do wyznaczenia statystyki Walda, umożliwiającej testowanie zmiany strukturalnej w wyrazie wolnym w okresie t_0 :

$$WALD = (\hat{\mathbf{B}}_{\perp}^T \hat{\mathbf{h}}_3)^T [D^2 (\hat{\mathbf{B}}_{\perp}^T \hat{\mathbf{h}}_3)]^{-1} [\hat{\mathbf{B}}_{\perp}^T \hat{\mathbf{h}}_3] + [\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{h}}_3]^T [D^2 (\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{h}}_3)]^{-1} (\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{h}}_3) \quad (13)$$

Z własności estymatora $\hat{\mathbf{h}}_3$ (por. aneks) wynika, że statystyka (13) jest ograniczona, tzn. $O_p(1)$.

Alternatywną postać statystyki Walda dla układu hipotez (11) można wyprowadzić, wykorzystując macierz restrykcji Θ (por. Perron, Yabu 2009) dla modelu jednorównaniowego. Hipotezę zerową można wówczas zapisać jako $\Theta \mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi}$, gdzie:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{\perp},1} \\ \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{\perp},2} \\ \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{\perp},3} \\ \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{\perp},4} \end{bmatrix},$$

macierz restrykcji $\Theta = [\mathbf{0}_{M \times M} \quad \mathbf{I}_{M \times M}]$,

$\boldsymbol{\varphi}$ – wektor zerowy o wymiarach $M \times 1$.

Statystyka Walda dla układu hipotez:

$$H_0: \Theta \mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi} \quad (14)$$

$$H_1: \Theta \mathbf{h} \neq \boldsymbol{\varphi}$$

jest następująca:

$$WALD = (\Theta \hat{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\varphi})^T [\Theta \hat{D}^2 (\hat{\mathbf{h}}) \Theta^T]^{-1} (\Theta \hat{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\varphi}) \quad (15)$$

Przy założeniu, że $\boldsymbol{\varphi}$ jest wektorem zerowym, równanie (15) sprowadza się do postaci:

$$WALD = (\Theta \hat{\mathbf{h}})^T [\Theta \hat{D}^2 (\hat{\mathbf{h}}) \Theta^T]^{-1} (\Theta \hat{\mathbf{h}}) \quad (16)$$

W przypadku, gdy moment wystąpienia zmiany strukturalnej nie jest znany, zaproponowano odpowiednie uogólnienie statystyki Walda (Andrews 1993):

$$\sup WALD = \sup_{\tau} WALD(\tau) \quad (17)$$

gdzie $\tau \in (0,1)$ charakteryzuje moment wystąpienia zmiany strukturalnej, zdefiniowany jako $t_0 = \tau T$; T – liczba obserwacji w próbie.

Najistotniejsza zmiana strukturalna odpowiada τ , dla którego wartość statystyki Walda jest najwyższa. Procedura znalezienia momentu, w którym następuje zmiana wyrazu wolnego w próbie, polega na wyznaczeniu następującej statystyki:

$$\sup WALD = \max_{0 < \tau < 1} WALD(\tau) \quad (18)$$

W hipotezie zerowej przyjmuje się $\mathbf{h}_3(\tau) = 0$, przy założeniu, że $\mathbf{h}_3(\tau)$ jest wektorem parametrów przy zmiennej:

$$u_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq [\tau T] \\ 0 & \text{dla } t < [\tau T] \end{cases}.$$

Rozkład statystyki (18) nie jest standardowy, zatem wartości krytyczne dla poszczególnych testów należy wyznaczyć symulacyjnie.

4. Własności testu *WALD* dotyczącego występowania zmiany wyrazu wolnego

Wartości krytyczne testu Walda danego wzorem (13) zostały wyznaczone za pomocą symulacji Monte Carlo, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, co jest równoważne warunkowi $\mathbf{h}_3 = 0$. Przyjęto także, że parametry związane z pozostałymi zmiennymi deterministycznymi w procesie generującym dane, których nie dotyczy hipoteza zerowa, są równe zero, ponieważ statystyka Walda nie zależy od wartości tych parametrów. Ostatecznie, proces generujący dane wykorzystany w symulacjach dotyczących wartości krytycznych ma postać $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t$. Proces generujący składową stochastyczną $\mathbf{y}_t$, przy założeniu, że jest R wektorów kointegrujących, można zapisać następująco (por. Toda 1994; 1995):

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-R} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{e}_t \quad (19)$$

gdzie $\mathbf{e}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, a $|\rho| < 1$ oznacza parametr autoregresyjny.

Powyższe równanie zakłada, że istnieje R stacjonarnych oraz $M - R$ niestacjonarnych szeregów, stąd rząd kointegracji wynosi R .

W symulacjach wartości krytycznych przyjęto, że parametry związane ze składnikami deterministycznymi są równe zero w procesie generującym dane. Liczba losowań wynosiła 100 000. Wartości krytyczne dla testu *WALD* wyznaczono dla poziomu istotności 5%.

Podsumowując, wartości krytyczne dla testu *WALD* zależą od liczby obserwacji w próbie (T), liczby zmiennych w systemie (M), wartości parametru autoregresyjnego (por. ρ we wzorze 19), rzędu kointegracji (R) oraz momentu wystąpienia zmiany strukturalnej (τ , gdzie $\tau = t_0/T$).

Analiza własności testu polega na obliczeniu mocy, a także rozmiaru testu. Moc testu *WALD* została wyznaczona symulacyjnie przy założeniu prawdziwości hipotezy alternatywnej. Oznacza to, że w procesie generującym dane występuje niezerowy parametr związany ze zmienną deterministyczną reprezentującą zmianę strukturalną. Założono zatem, że DGP ma postać:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_3 u_t \quad (20)$$

gdzie:

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-R} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{e}_t,$$

$$\mathbf{e}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}),$$

$$u_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq [\tau T] \\ 0 & \text{dla } t < [\tau T] \end{cases}$$

We wszystkich eksperymentach dotyczących mocy testu liczba losowań wynosiła 10 000.

Statystyka testu *WALD* nie zależy od wyrazu wolnego, więc wektor $\mathbf{h}_1$ można pominąć (Perron, Yabu 2009). Wzór (20) można wówczas zapisać następująco:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{h}_3 u_{1t} \quad (21)$$

Następnie założono, że znany jest moment wystąpienia zaburzenia oraz wartości parametrów związanych ze zmianą wyrazu wolnego. W celu wygenerowania danych ze zmianą strukturalną należało określić wielkość zaburzenia. Przyjęto, że $\mathbf{h}_3$ jest proporcjonalne do średniej procesu: $\mathbf{h}_3 = \omega \mathbf{h}_1$. Moc testu została oszacowana dla trzech różnych wartości współczynnika ω , $\omega \in \{1; 1,5; 2\}$. W eksperymencie przyjęto, że zmiana strukturalna następuje w środku próby, stąd $\tau = 0,5$, natomiast parametr autoregresyjny ρ wynosi 0,5.

Rezultaty przedstawione w tabeli 2 prowadzą do wniosku, że moc testu *WALD* rośnie wraz ze wzrostem liczby obserwacji, wielkości zaburzenia oraz liczby wspólnych trendów stochastycznych.

W kolejnym eksperymencie przeanalizowano wrażliwość mocy testu *WALD* na założenie dotyczące normalności rozkładu składników losowych. Ponownie obliczono wartości krytyczne oraz moc testu (por. tabela 3) dla składników losowych pochodzących z rozkładu *t*-Studenta (z pięcioma stopniami swobody). Przyjęto zatem, że proces generujący składową stochastyczną ma postać:

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-R} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \sim t\text{-Studenta} \quad (5) \quad (22)$$

Wyniki zawarte w tabeli 3 prowadzą do wniosku, że zmiana rozkładu składników losowych $\mathbf{e}_t$ nie powoduje pogorszenia mocy testu *WALD*.

Dodatkowej analizie poddano wpływ momentu wystąpienia zmiany strukturalnej na moc testu *WALD*. Przyjęto $\tau \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$ dla systemu czterech zmiennych, w którym rząd kointegracji wynosi 2. Bez względu na to, czy zmiana strukturalna wystąpiła na początku, w środku czy na końcu próby, moc testu *WALD* nie zmienia się istotnie (por. tabela 4).

Zbadano, jaki wpływ na moc testu w procesie generującym składową stochastyczną ma parametr autoregresyjny, zakładając, że $\rho \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$. Wyniki zestawiono w tabeli 5. Dla $\omega > 1,5$ moc testu *WALD* okazała się niewrażliwa na wartość ρ . Dla małych wartości ω można zauważyć niewielki spadek mocy testu wraz ze wzrostem ρ .

Rozmiar rozważanego testu wyznaczono symulacyjnie na podstawie 10 000 losowań. Wartości statystyki wygenerowano przy założeniu braku zmian strukturalnych (H_0), a następnie obliczono praw-

dopodobięństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. Na podstawie tabeli 6 można stwierdzić, że we wszystkich rozważonych przypadkach wielkość testu *WALD* wynosi blisko 5%.

Analiza własności testu *supWALD* składała się z dwóch etapów. Najpierw w wyniku kolejnych eksperymentów wygenerowano dane ze zmianą strukturalną w wyrazie wolnym w różnych okresach, $\tau \in \{0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8\}$. Następnie wyznaczono moment w próbie, dla którego statystyka Walda osiąga najwyższą wartość. W przypadku każdej ze statystyk powtórzono eksperyment 500 razy i sprawdzono, w ilu przypadkach maksymalną statystykę Walda otrzymano dla okresu, w którym zmiana strukturalna została założona w procesie generującym dane (por. tabela 7). Eksperymenty przeprowadzono dla systemu czterech zmiennych, w którym występują dwa wektory kointegrujące.

5. Model VEC kursu walutowego złoty/euro. Wyniki empiryczne

Test *WALD*, *supWALD* (por. wzory 13 i 17) oraz model VEC ze zmianą strukturalną składowej deterministycznej (por. wzór 8) zastosowano do systemu objaśniającego kurs walutowy złoty/euro. W analizowanym systemie można się spodziewać wielu zmian strukturalnych, wynikających z procesów rynkowych oraz instytucjonalnych.

Zgodnie z hipotezą CHEER realny kurs walutowy jest determinowany przez parytet siły nabywczej walut (PPP, ang. *purchasing power parity*) oraz nieubezpieczony parytet stóp procentowych (UIP, ang. *uncovered interest rate parity*); por. Juselius, Johansen (1992). Kryzys finansowy w 2008 r. wykazał konieczność rozszerzenia modelu kursu o zmienną, która aproksymuje ryzyko finansowe (Kelm 2011). Jedną z propozycji jest objaśnienie premii za ryzyko wycenami kontraktów CDS (ang. *credit default swap*, por. Kęłowski 2011; Kęłowski, Welfe 2010). Równanie objaśniające realny kurs można wówczas zapisać następująco:

$$q_t = \phi_1[(I_t - \Delta p_t) - (I_t^f - \Delta p_t^f)] + \phi_3(CDS_t - CDS_t^f) + \varepsilon_t \quad (23)$$

gdzie:

- q_t – realny kurs walutowy ($q_t = ex_t - p_t + p_t^f$; ex_t – nominalny kurs walutowy, p_t – indeks cen krajowych, p_t^f – indeks cen za granicą),
- I_t – krajowa długookresowa stopa procentowa,
- I_t^f – długookresowa stopa procentowa za granicą,
- Δp_t – stopa inflacji w kraju,
- Δp_t^f – stopa inflacji za granicą,
- CDS_t – wycena kontraktów CDS w kraju,
- CDS_t^f – wycena kontraktów CDS za granicą,
- ε_t – stacjonarny składnik losowy związany z oczekiwanym ryzykiem.

Wycena instrumentu pochodnego dotycząca ryzyka kredytowego (CDS) określa premię za ryzyko zawartą w poziomie oprocentowania obligacji skarbowych (por. Duffie 1999; Kęłowski 2015). Różnica między poziomami CDS a stopami procentowymi pozwala zatem otrzymać stopy procentowe skorygowane o ryzyko:

$$q_t = \phi_1[(I_t - CDS_t - \Delta p_t) - (I_t^f - CDS_t^f - \Delta p_t^f)] + \varepsilon_t \quad (24)$$

Model CHEER nie uwzględnia mechanizmów mających wpływ na kurs walutowy w średnim okresie, np. relacji aktywów zagranicznych netto do produktu krajowego brutto danego kraju, różnicy między wydajnością pracy w kraju i za granicą lub relacji tzw. warunków wymiany międzynarodowej (ang. *terms of trade*) w kraju i za granicą. Model (24) można zatem rozszerzyć o zmienną definiującą relatywne *terms of trade*, która wynika z hipotezy BEER (Kelm 2013):

$$q_t = \phi_0 + \phi_1[(I_t - CDS_t - \Delta p_t) - (I_t^f - CDS_t^f - \Delta p_t^f)] + \phi_2(tot_t - tot_t^f) + \varepsilon_t \quad (25)$$

gdzie:

ϕ_0 – wyraz wolny,

$tot_t - tot_t^f$ – relacja *terms of trade* w kraju i za granicą.

Analizowana próba obejmuje dane miesięczne za okres od marca 2003 do maja 2014 r. Sprawdzono możliwość występowania w tym czasie zmiany strukturalnej o charakterze zmiany wyrazu wolnego, co pozwala następująco zapisać równanie (25):

$$q_t = \phi_0 + \phi_1[(I_t - CDS_t - \Delta p_t) - (I_t^f - CDS_t^f - \Delta p_t^f)] + \phi_2(tot_t - tot_t^f) + \phi_3 u_t + \varepsilon_t \quad (26)$$

gdzie:

$$u_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq t_0 \\ 0 & \text{dla } t < t_0 \end{cases},$$

t_0 – nieznan moment wystąpienia zmiany strukturalnej.

W równaniu objaśniającym kurs złoty/euro przyjęto, że krajem referencyjnym są Niemcy, ze względu na ich wysoki udział w wymianie handlowej Polski. Przedmiotem rozważań był następujący system zawierający sześć zmiennych:

$$\mathbf{v}_t = [q_t \quad IF_t \quad \Delta p_t \quad IF_t^f \quad \Delta p_t^f \quad tot_t] \quad (27)$$

gdzie:

q_t – realny kurs walutowy (por. wzór 23),

p_t – indeks krajowych cen towarów i usług konsumpcyjnych (2010 = 100),

p_t^f – indeks cen towarów i usług konsumpcyjnych w Niemczech (2010 = 100),

$IF_t = (I_t - CDS_t)$ – krajowe stopy procentowe wolne od ryzyka,

I_t – nominalna długookresowa krajowa stopa procentowa (oprocentowanie 10-letnich obligacji),

CDS_t – instrument pochodny ryzyka kredytowego dla Polski,

$IF_t^f = (I_t^f - CDS_t^f)$ – stopy procentowe dla Niemiec wolne od ryzyka,

I_t^f – nominalna długookresowa stopa procentowa dla Niemiec (oprocentowanie 10-letnich obligacji),

CDS_t^f – instrument pochodny ryzyka kredytowego dla Niemiec,

$tot_t = (tot_t - tot_t^f)$ – relatywne *terms of trade*,

tot_t – relacja deflatora polskiego eksportu do deflatora polskiego importu (2010 = 100),

tot_t^f – relacja deflatora eksportu Niemiec do deflatora importu Niemiec (2010 = 100).

Małe litery oznaczają logarytmy.

W ramach analizowanego systemu założono słabą egzogeniczność zmiennych dotyczących gospodarki Niemiec oraz zidentyfikowano dwie relacje o charakterze długookresowym. Pierwsza z nich jest równaniem kursu walutowego o postaci:

$$q_t + \beta_{21}[(IF_t - \Delta p_t) - (IF_t^f - \Delta p_t^f)] + \beta_{61}totr_t + \beta_{71} + \beta_{81}u_t = \varepsilon_{1t} \quad (28)$$

W drugiej relacji kointegrującej przyjęto, że krajowe stopy procentowe wolne od ryzyka są funkcją krajowej inflacji:

$$IF_t + \beta_{32}\Delta p_t + \beta_{72} + \beta_{82}u_t = \varepsilon_{2t} \quad (29)$$

W celu wyznaczenia momentu zaburzenia t_0 należało najpierw dokonać estymacji parametrów składowej stochastycznej i składowej deterministycznej modelu VEC (wzór 9). Obliczenie statystyki supWALD (wzór 17) umożliwiło identyfikację momentu wystąpienia zmiany strukturalnej. Do estymacji parametrów składowej stochastycznej wykorzystano metodę największej wiarygodności z uwzględnieniem restrykcji nałożonych na macierz wektorów kointegrujących i macierz dostosowań. Restrykcje nałożone na macierz wag wynikają ze słabej egzogeniczności zmiennych dotyczących gospodarki Niemiec, natomiast restrykcje strukturalizujące nałożone na macierz $\mathbf{B}^*$ zapewniają odpowiednią interpretację otrzymanych wektorów kointegrujących (zgodną z teorią ekonomii).

Moment najbardziej istotnej zmiany strukturalnej określony jest przez najwyższą wartość statystyki WALD. Ze względu na gorsze własności testu supWALD w przypadku, gdy zmiana strukturalna występuje na początku lub na końcu próby, do wyznaczenia maksimum nie wykorzystano wartości statystyki dla okresów odpowiadających 25% obserwacji z początku i z końca próby: $\text{supWALD} = \max_{0,25 < \tau < 0,75} \text{WALD}(\tau)$, gdzie $\tau \in \{0,26; 0,27; \dots; 0,74\}$. Maksymalna statystyka testu WALD – przy założeniu, że zmiana strukturalna powodowała zmianę wyrazu wolnego – wynosi 90,8364 dla $\tau = 0,37$. Oznacza to, że zmiana strukturalna w wyrazie wolnym w procesach generujących zmienne wystąpiła w marcu 2007 r. (por. wykres 1). Wartość krytyczna testu supWALD, wyznaczona symulacyjnie dla trzech zmiennych endogenicznych: $R = 2$, $T = 150$ i $n = 100\,000$, wynosi 47,7778. Należy zatem odrzucić hipotezę zerową na korzyść alternatywnej, w której zakłada się istotność testowanej zmiany strukturalnej. Pod koniec pierwszego kwartału 2007 r. rozpoczął się kryzys finansowy w Stanach Zjednoczonych oraz nastąpiła nagła aprecjacja złotego w stosunku do innych walut (m.in. do euro i dolara), która nie miała odzwierciedlenia w zmianach mechanizmów makroekonomicznych.

Dodatkowo, z wykresu 1 wynika, że można wyodrębnić dłuższy podokres: styczeń – wrzesień 2007 r., w którym wartości statystyk Walda są większe od wartości krytycznej. Rozważany model VEC (wzór 7) oraz procedura testowania uwzględniają występowanie jednej zmiany strukturalnej. Dalszej analizie poddano zatem model ze zmianą strukturalną w okresie, dla którego otrzymano najwyższą wartość statystyki (marzec 2007 r.).

Należy zauważyć, że w wektorach kointegrujących modelu VEC występują zmienne z jednookresowym opóźnieniem. W tych relacjach zmienna u_{t-1} , która charakteryzuje zmianę wyrazu wolnego, wynosi więc 0 w okresie przed kwietniem 2007 r. oraz 1 w kwietniu 2007 r. i później.

Następnie przeanalizowano model VEC z restrykcjami nałożonymi na macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}^*$, przy założeniu, że zmiana strukturalna w procesach generujących zmienne nastąpiła w marcu 2007 r. Na podstawie otrzymanych wyników testu śladu dla modelu ze zmianą strukturalną (por. Johansen, Mosconi,

Nielsen 2000) można wnioskować, że w analizowanym systemie (warunkowym względem zmiennych słabo egzogenicznych) występują dwa bazowe wektory kointegrujące (por. tabela 8).

Przy założeniu $R = 2$ oszacowania modelu VEC ze zmianą wyrazu wolnego w marcu 2007 r. (t_0) z restrykcjami na $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}^*$ ($\mathbf{H}_A$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ – macierze restrykcji) są następujące:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{H}_A \hat{\boldsymbol{\Phi}}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1134 & 2,2057 \\ (-2,55) & (1,31) \\ 0,0002 & -0,035 \\ (0,72) & (-2,76) \\ 0,0176 & 0,5497 \\ (5,04) & (4,1) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}^{*T} &= ([\mathbf{H}_1 \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{B1} \quad \mathbf{H}_2 \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{B2}])^T = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 18,73 & -18,73 & -18,73 & 18,73 & 2,33 & -1,49 & 0,08 \\ (3,87) & (-3,87) & (-3,87) & (3,87) & (3,44) & (-5,16) & (2,99) \\ 0 & 1 & -0,67 & 0 & 0 & 0 & -0,004 & 0,002 \\ & & (-5,89) & & & (-2,71) & (2,67) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

W nawiasach podano wartości statystyk t -Studenta, obliczone na podstawie wzorów dostępnych w pracy Hansena i Juseliusa (2002); wszystkie obliczenia wykonano w programie Matlab.

Warto zauważyć, że oprócz zmiennej u_t i jej dostosowań w krótkim okresie (Δu_{t-1}) w modelu nie występują żadne inne zmienne zero-jedynkowe. Otrzymane wektory kointegrujące można zapisać w postaci następujących równań długookresowych:

$$q_t = -18,73 \cdot [(IF_t - \Delta p_t) - (IF_t^f - \Delta p_t^f)] - 2,33 tot_r_t + 1,49 - 0,08 u_t + e_{1t} \quad (32)$$

$$IF_t = 0,67 \Delta p_t + 0,004 - 0,002 u_t + e_{2t} \quad (33)$$

Oszacowania parametrów długookresowych w (32) i (33) są zgodne z teorią i z wynikami innych badań empirycznych (por. Kęłowski, Welfe 2012; Kęłowski 2015). Wzrost dysparytetu pomiędzy polskimi a zagranicznymi realnymi stopami procentowymi skorygowanymi o ryzyko powoduje spadek kursu realnego, a zatem aprecjację kursu nominalnego złoty/euro. Poprawa warunków wymiany międzynarodowej w Polsce powoduje także aprecjację polskiej waluty. Z drugiego równania wynika, że na skutek zwiększenia się krajowej inflacji następuje mniejszy niż proporcjonalny wzrost stóp procentowych wolnych od ryzyka.

Wykorzystując wyniki testu CRDF, można stwierdzić, że opisane relacje kointegrujące nie generują trendów stochastycznych, a więc są stacjonarne. Otrzymane oszacowania parametrów macierzy wag wskazują na istotne ujemne dostosowanie realnego kursu do wektora kointegrującego, opisującego równanie długookresowe dla kursu, oraz ujemne istotne dostosowanie krajowych stóp procentowych wolnych od ryzyka do drugiego wektora kointegrującego. Na koniec zbadano właściwości stochastyczne reszt z poszczególnych równań dla zmiennych endogenicznych Δq_t , ΔIF_t , $\Delta^2 p_t$ w modelu VEC. Można wnioskować, że reszty z poszczególnych równań wektorowego modelu korekty błędem są stacjonarne, mają rozkład normalny oraz nie występuje autokorelacja.

6. Podsumowanie

Występowanie zmiany strukturalnej w procesach generujących zmienne ekonomiczne silnie wpływa na postać wielorównaniowego modelu korekty błędem. Rezultaty prowadzą do wniosku, że występowanie zmiany strukturalnej w części deterministycznej DGP powoduje jednoczesną modyfikację składowych deterministycznych w przestrzeni kointegrującej i poza nią. Wprowadzenie zmiennych zero-jedynkowych do przestrzeni kointegrującej lub poza nią, choć technicznie możliwe, nie może być interpretowane jako zmiana strukturalna.

Do sprawdzenia, czy występuje zmiana wyrazu wolnego w znanym okresie, zaproponowano wykorzystanie statystyki Walda. Okazuje się, że moc testu dotyczącego zmiany wyrazu wolnego rośnie wraz ze wzrostem liczby obserwacji oraz wielkości zaburzenia. Z dodatkowo przeprowadzonych eksperymentów wynika, że moc testu *WALD* nie jest wrażliwa na zmianę rozkładu składników losowych (z normalnego na *t*-Studenta), zmianę parametru autoregresyjnego założonego w symulacjach oraz moment wystąpienia zmiany strukturalnej. Ze względu na to, że moment wystąpienia zmiany strukturalnej w systemach opisujących funkcjonowanie mechanizmów ekonomicznych zazwyczaj nie jest znany, zaproponowano wykorzystanie w testowaniu statystyki *supWALD*. Na jej podstawie można wyznaczyć moment zaburzenia, tzn. taki okres, w którym statystyka Walda ma najwyższą wartość.

Model VEC ze zmianą strukturalną, a dokładniej zmianą wyrazu wolnego, zastosowano do modelowania kursu walutowego złoty/euro. W celu zidentyfikowania momentu wystąpienia zaburzenia w składowej deterministycznej procesu generującego dane wykorzystano statystykę *supWALD*. Okazuje się, że w analizowanym modelu zmiana strukturalna wystąpiła w marcu 2007 r. W systemie zidentyfikowano dwa wektory kointegrujące, z których jeden można interpretować jako długookresowe równanie kursu walutowego złoty/euro. Drugi wektor kointegrujący jest równaniem długookresowych stóp procentowych skorygowanych o ryzyko.

Bibliografia

- Andrews D.W.K. (1993), Tests for parameter instability and structural change with unknown change point, *Econometrica*, 61(4), 821–856.
- Duffie D. (1999), Credit swap valuation, *Financial Analysis Journal*, 55, 73–87.
- Gosińska E. (2009), Analiza kointegracyjna z zaburzeniami struktury na przykładzie modelu handlu zagranicznego Polski, *Bank i Kredyt*, 40(6), 41–58.
- Hansen H., Johansen S. (1999), Some tests for parameter constancy in cointegrated VAR-models, *Econometrics Journal*, 2(2), 306–333.
- Hansen H., Juselius K. (2002), *CATS in RATS: cointegration analysis of time series, user's manual*, Estima, Evanston.
- Johansen S. (1995), *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*, Oxford University Press.
- Johansen S., Mosconi R., Nielsen B. (2000), Cointegration in the presence of structural breaks in the deterministic trend, *Econometrics Journal*, 1(3), 216–249.
- Juselius K. (2006), *The cointegrated VAR model: methodology and applications*, Oxford University Press.
- Juselius K., Johansen S. (1992), Testing structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and the UIP for UK, *Journal of Econometrics*, 53, 211–244.

- Kelm R. (2011), Ryzyko walutowe i wahania kursu PLN/EUR w latach 1999–2009, *Bank i Kredyt*, 2, 31–66.
- Kelm R. (2013), *Kurs złoty/euro: teoria i empiria*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Kęłowski P. (2011), The behaviour of exchange rates in the Central European countries and credit default risk premiums, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, 3, 221–236.
- Kęłowski P. (2015), Stały czy płynny? Model PVEC realnego kursu walutowego dla krajów Europy Środkowo-Wschodniej – implikacje dla Polski, *Materiały i Studia NBP*, 312, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Kęłowski P., Welfe A. (2010), Estimation of the equilibrium exchange rate: the CHEER approach, *Journal of International Money and Finance*, 29, 1385–1397.
- Kęłowski P., Welfe A. (2012), A risk-driven approach to exchange-rate modelling, *Economic Modelling*, 29, 1473–1482.
- Lütkepohl H. (2005), *New introduction to multiple time series analysis*, Springer Verlag, Berlin.
- Majsterek M. (2008), *Wielowymiarowa analiza kointegracyjna w ekonomii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Perron P. (2006), Dealing with structural breaks, w: K. Patterson, T.C. Mills (red.), *Palgrave handbook of econometrics*, 1, Econometric Theory, Palgrave Macmillan, London.
- Perron P., Yabu T., (2009) Testing for shifts in trend with an integrated or stationary noise component, *Journal of Business and Economic Statistics*, 27, 369–396.
- Saikkonen P., Lütkepohl H., (2000), Testing for the cointegrating rank of a VAR process with structural shifts, *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 451–464.
- Seo B. (1998), Tests for structural change in cointegrated systems, *Econometric Theory*, 14, 222–259.
- Sobreira N., Nunes L. (2012), *Testing for broken trends in multivariate time series*, mimeo, <http://docentes.fe.unl.pt/~nsobreira/JM%20Paper%20Nuno%20Sobreira.pdf>.
- Toda H.Y. (1994), Finite sample properties of likelihood ratio tests for cointegrating ranks when linear trends are present, *The Review of Economics and Statistics*, 76(1), 66–79.
- Toda H.Y. (1995), Finite sample performance of likelihood ratio tests for cointegrating ranks in vector autoregressions, *Econometric Theory*, 11(5), 1015–1032.
- Welfe A. (2009), *Ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Podziękowania

Badanie finansowane z grantu Narodowego Centrum Nauki (grant MAESTRO 4 nr UMO-2013/08/A/HS4/00612).

Aneks

Estymatory parametrów części deterministycznej w kierunku $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}_\perp$ należy wyznaczyć na podstawie równania:

$$\hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\Pi}(L) \mathbf{v}_t = \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{1t}} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{1,1}} + \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{1t}} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{1,1}} + \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{3t}} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{1,3}} + \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{3t}} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{3,3}} + \boldsymbol{\eta}_t \quad (\text{A1})$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{1t}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{K}}_{1t} \hat{\mathbf{B}} (\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{B}})^{-1}, \quad \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{1,1}} = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{h}_1,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{1t}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{K}}_{1t} \hat{\mathbf{B}}_\perp (\hat{\mathbf{B}}_\perp^T \hat{\mathbf{B}}_\perp)^{-1}, \quad \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{1,1}} = \hat{\mathbf{B}}_\perp^T \mathbf{h}_1,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{3t}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{K}}_{3t} \hat{\mathbf{B}} (\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{B}})^{-1}, \quad \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{3,3}} = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{h}_3,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_{3t}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{K}}_{3t} \hat{\mathbf{B}}_\perp (\hat{\mathbf{B}}_\perp^T \hat{\mathbf{B}}_\perp)^{-1}, \quad \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{B}}_{3,3}} = \hat{\mathbf{B}}_\perp^T \mathbf{h}_3.$$

Zmienne $\hat{\mathbf{K}}_{1t}$ oraz $\hat{\mathbf{K}}_{3t}$ są definiowane przez wzory:

$$\hat{\mathbf{K}}_{1t} = \hat{\Pi}(L) = \begin{cases} \mathbf{I}, & t = 1 \\ \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{t-1} \hat{\Pi}_j, & t = 2, \dots, S \\ -\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^T, & t = S+1, \dots, T \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{3t} = \hat{\Pi}(L) u_t = \begin{cases} \mathbf{0}, & t < t_0 \\ \mathbf{I}, & t = t_0 \\ \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{t-1} \hat{\Pi}_j, & t = t_0 + 1, \dots, t_0 + S - 1 \\ -\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^T, & t = t_0 + S, \dots, T \end{cases} \quad (\text{A3})$$

Parametry części stochastycznej, czyli $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$, ..., $\hat{\Gamma}_{S-1}$, $\hat{\Omega}$, należy wyznaczyć, wykorzystując metodę Johansena na podstawie modelu (7), a macierze parametrów zawarte w wielomianie opóźnień $\hat{\Pi}(L)$ na podstawie wzorów:

$$\hat{\Pi}_1 = \mathbf{I}_M + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^T + \hat{\Gamma}_1 \quad (\text{A4})$$

$$\hat{\Pi}_j = \hat{\Gamma}_j - \hat{\Gamma}_{j-1}, \quad j = 2, \dots, S-1 \quad (\text{A5})$$

$$\hat{\Pi}_S = -\hat{\Gamma}_{S-1} \quad (\text{A6})$$

Zgodnie z uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów macierz $\mathbf{Q}$ należy zdefiniować w taki sposób, aby spełniony był warunek $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Omega}^{-1}$. Wówczas macierz wariancji składnika losowego w równaniu (A1) jest sferyczna i jednostkowa. Warunek ten jest spełniony, gdy $\mathbf{Q} = [\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A})^{-1/2} \quad \mathbf{A}_\perp(\mathbf{A}_\perp^T\mathbf{\Omega}\mathbf{A}_\perp)^{-1/2}]$, gdzie $\mathbf{\Omega}$ jest macierzą wariancji kowariancji składników losowych równania (7). Ostatecznie estymatory $\hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,1}, \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,3}, \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}},1}, \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}},3}$ należy wyznaczyć z równania (A1) za pomocą uogólnionej metody najmniejszych kwadratów:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}},1} \\ \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}},3} \\ \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,1} \\ \hat{\mathbf{h}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,3} \end{bmatrix} = \left(\sum_{t=1}^T (\hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_t) \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \hat{\mathbf{\Pi}}(L) \mathbf{v}_t \right)$$

gdzie $\hat{\mathbf{K}}_t = [\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}},1t} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}},3t} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,1t} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{B}}_\perp,3t}]$.

Własności asymptotyczne estymatorów składowej deterministycznej z równania (A1) w kierunku $\mathbf{B}_\perp$ i $\mathbf{B}$ są następujące (por. Saikkonen, Lütkepohl 2000):

$$\mathbf{B}_\perp^T (\hat{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{h}_1) = O_p(1) \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{B}_\perp^T (\hat{\mathbf{h}}_3 - \mathbf{h}_3) = O_p(1) \quad (\text{A9})$$

$$\sqrt{T} \mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{h}_1) = O_p(1) \quad (\text{A10})$$

$$\sqrt{T - t_0} \mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{h}}_3 - \mathbf{h}_3) = O_p(1) \quad (\text{A11})$$

Tabela 1

Wartości krytyczne testu *WALD* dla $\tau = 0,5$, $\rho = 0,5$, $n = 100\ 000$

	<i>R</i>	<i>T</i> = 100	<i>T</i> = 150	<i>T</i> = 200
<i>M</i> = 4	1	74,7193	45,7952	35,7194
	2	70,4499	47,4562	38,8849
	3	50,4537	36,5874	30,9836
<i>M</i> = 5	1	125,8728	71,7660	52,2211
	2	124,4478	76,8382	60,3457
	3	101,1121	68,3139	55,3375
	4	69,3609	48,8074	40,9770

Uwagi: *M* – liczba zmiennych w systemie, *R* – wymiar przestrzeni kointegrującej, *T* – liczebność próby; obliczenia wykonano w programie Matlab.

Tabela 2

Moc testu *WALD* dla $\tau = 0,5$, $\rho = 0,5$, $n = 100\ 000$

	K	R	$\omega = 1$			$\omega = 1,5$			$\omega = 2$		
			$T = 100$	$T = 150$	$T = 200$	$T = 100$	$T = 150$	$T = 200$	$T = 100$	$T = 150$	$T = 200$
$M = 4$	3	1	0,7380	0,8918	0,9440	0,8988	0,9653	0,9816	0,9538	0,9845	0,9931
	2	2	0,6253	0,7634	0,8348	0,7910	0,8888	0,9261	0,8766	0,9353	0,9567
	1	3	0,4554	0,5612	0,6225	0,6116	0,6905	0,7435	0,7061	0,7718	0,8063
$M = 5$	4	1	0,7313	0,9170	0,9683	0,9223	0,9794	0,9937	0,9664	0,9932	0,9972
	3	2	0,6678	0,8349	0,9056	0,8596	0,9408	0,9671	0,9314	0,9746	0,9888
	2	3	0,5895	0,7283	0,7992	0,7757	0,8567	0,9004	0,8624	0,9178	0,9438
	1	4	0,4336	0,5418	0,5993	0,5884	0,6781	0,7204	0,6821	0,7590	0,7951

Uwagi: *M* – liczba zmiennych w systemie, *R* – wymiar przestrzeni kointegrującej, *K* – liczba wspólnych trendów stochastycznych, *T* – liczebność próby, $K = M - R$; obliczenia wykonano w programie Matlab.

Tabela 3

Moc testu *WALD* dla składników losowych z rozkładu *t*-Studenta dla $T = 200$

	K	R	$\omega = 1$		$\omega = 1,5$		$\omega = 2$	
			normalny	t -Studenta	normalny	t -Studenta	normalny	t -Studenta
$M = 4$	3	1	0,9440	0,9375	0,9816	0,9785	0,9931	0,9917
	2	2	0,8348	0,8298	0,9261	0,9212	0,9567	0,9511
	1	3	0,6225	0,6184	0,7435	0,7394	0,8063	0,8087

Uwagi: M – liczba zmiennych w systemie, R – wymiar przestrzeni kointegrującej, K – liczba wspólnych trendów stochastycznych, T – liczebność próby, $K = M - R$; obliczenia wykonano w programie Matlab.

Tabela 4

Moc testu *WALD* w zależności od τ dla $T = 200$, $M = 4$ i $R = 2$

ω	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,3$	$\tau = 0,4$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,6$	$\tau = 0,7$	$\tau = 0,8$	$\tau = 0,9$
1	0,9134	0,8753	0,8512	0,8368	0,8348	0,8370	0,8553	0,8810	0,9128
1,5	0,9602	0,9441	0,9257	0,9284	0,9261	0,9217	0,9342	0,9429	0,9632
2	0,9806	0,9681	0,9606	0,9536	0,9567	0,9609	0,9628	0,9666	0,9820

Tabela 5

Moc testu *WALD* w zależności od parametru ρ dla $T = 200$, $M = 4$ i $R = 2$

ω	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,6$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,8$	$\rho = 0,9$
1	0,8516	0,8539	0,8433	0,8393	0,8348	0,8188	0,8005	0,7720	0,7485
1,5	0,9318	0,9289	0,9282	0,9247	0,9261	0,9105	0,9087	0,8892	0,8799
2	0,9643	0,9591	0,9602	0,9591	0,9567	0,9492	0,9455	0,9368	0,9301

Uwagi: obliczenia wykonano w programie Matlab.

Tabela 6

Rozmiar testu *WALD*

	<i>R</i>	<i>T</i> = 100	<i>T</i> = 200
<i>M</i> = 4	1	0,0503	0,0528
	2	0,0516	0,0501
	3	0,0512	0,0511
<i>M</i> = 5	1	0,0444	0,0526
	2	0,0450	0,0477
	3	0,0468	0,0466
	4	0,0496	0,0497

Uwagi: *R* – wymiar przestrzeni kointegrującej, *T* – liczebność próby; obliczenia wykonano w programie Matlab.

Tabela 7

Własności testu sup*WALD* (prawdopodobieństwo zidentyfikowania momentu założonej zmiany wyrazu wolnego) dla *T* = 200

ω	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,6$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,8$
0,5	0,584	0,614	0,646	0,693	0,672	0,634	0,585
1	0,970	0,984	0,978	0,971	0,978	0,990	0,970
1,5	0,999	1	1	0,999	0,998	1	0,998

Uwagi: obliczenia wykonane w programie Matlab.

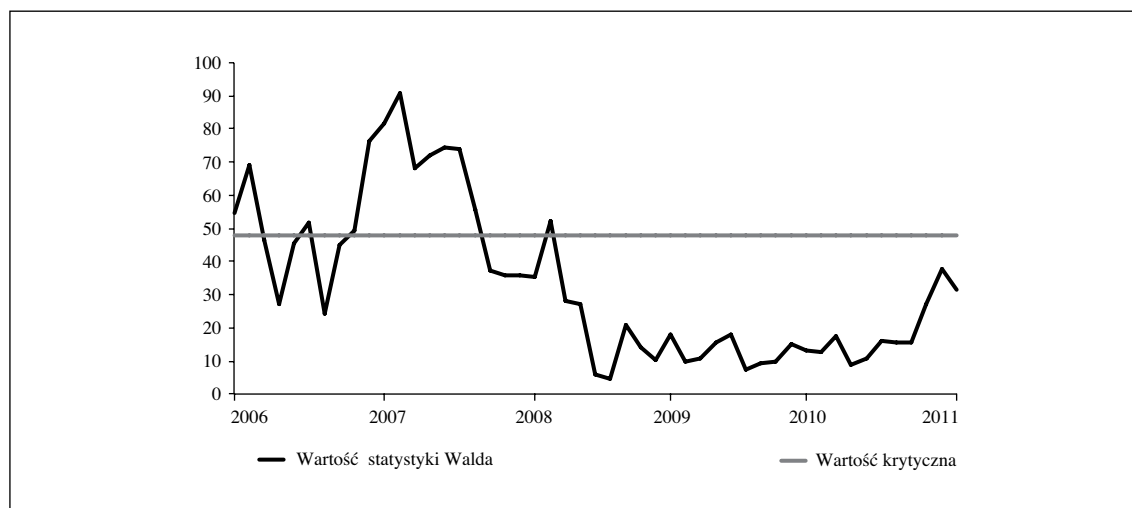
Tabela 8

Wyniki testu śladu dla modelu ze zmianą wyrazu wolnego w kwietniu 2007 r. przy założeniu słabej egzogeniczności zmiennych: IF_t^f , Δp_t^f , $totr_t$

<i>R</i>	Wartość statystyki	Wartość statystyki z korektą Bartletta	Wartość krytyczna
0	101,618 (0,000)	97,831 (0,000)	57,267
1	53,314 (0,001)	51,146 (0,001)	35,498
2	14,054 (0,177)	13,540 (0,125)	18,144

Uwagi: *R* – wymiar przestrzeni kointegrującej; w nawiasach podano wartości *p-value*; wartości krytyczne wyznaczono symulacyjnie w programie CATS.

Wykres 1

Wartości statystyk $WALD(\tau)$ dla różnych τ 

Testing for structural break in a VEC model

Abstract

Structural change can affect the deterministic component of the data generating process (DGP). It can be shown that the introduction of a dummy into the cointegration space in the period t must be interpreted as structural break in the DGP in the period $t-1$. On the other hand, if it is introduced into the cointegration space, the respective dummy must be simultaneously placed outside the cointegration space as well.

In order to test for the break affecting the deterministic component we employed the Wald statistic. The critical values and the power of the Wald test were simulated for various sizes of the cointegrating space, the number of endogenous variables, the span of the break, normally and t -distributed errors. The power of the test depends mostly on the magnitude of the break and the number of observations while other factors are of secondary importance.

The cointegrated VAR with structural break was used to explain the behaviour of the Polish zloty/euro exchange rate. Two cointegrating vectors were identified. The first one can be interpreted as a long-term equation of the exchange rate zloty/euro and the second vector defines the long-term real domestic interest rates corrected for risk. The $\text{sup}WALD$ statistic was used in order to identify the moment of the break.

Keywords: structural break, VECM, Wald test, test for structural break, exchange rate modelling PLN/EUR