

Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy

Renata Wróbel-Rotter*

Nadesłany: 5 września 2012 r. Zaakceptowany: 22 kwietnia 2013 r.

Streszczenie

W modelach DSGE-VAR, zwanych hybrydowymi modelami wektorowej autoregresji, główną rolę w kształtowaniu się brzegowej gęstości obserwacji odgrywa parametr wagowy, określający optymalny udział informacji *a priori* pochodzącej z modelu równowagi ogólnej w modelu połączonym. W modelach, w których jest on estymowany, należy przyjąć rozkład *a priori*, mający wpływ na rozkład *a priori* wag modelu strukturalnego w modelu połączonym, co można zilustrować za pomocą prostej techniki symulacyjnej. Wnioskowanie *a posteriori* o optymalnej wadze informacji *a priori* w modelu hybrydowym pozostaje odporne na zmiany w założeniach *a priori*, dotyczące parametru wagowego. Ocena parametru wagowego może zostać również przeprowadzona po estymacji szeregu modeli warunkowych, na podstawie kryterium maksymalizacji brzegowej gęstości obserwacji. Analiza kształtowania się *a posteriori* zmodyfikowanej średniej harmonicznej wskazuje, że nie powinna ona stanowić jedyne kryterium wyboru modelu.

Słowa kluczowe: DSGE-VAR, wnioskowanie bayesowskie, brzegowa gęstość obserwacji, specyfikacja rozkładu *a priori*

JEL: C11, C18, C51, E173

* Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych; e-mail: eevrobel@cyf-kr.edu.pl.

1. Wstęp

Estymowane modele równowagi ogólnej można stosować do opracowania rozkładu *a priori* wektorowej autoregresji. W literaturze przedmiotu znane są jako modele DSGE-VAR (ang. Dynamic Stochastic General Equilibrium Vector AutoRegression) i stanowią grupę identyfikowalnych, hybrydowych modeli wektorowej autoregresji. Łączą one zalety teoretycznych modeli makroekonomicznych z elastycznością wektorowej autoregresji i pozwalają określić, w jakim stopniu dane empiryczne potwierdzają każde z podejść. Model DSGE-VAR składa się z pomocniczej wektorowej autoregresji, służącej do aproksymacji rozwiązania modelu równowagi ogólnej, które następnie służy do konstrukcji rozkładu *a priori* głównego modelu wektorowej autoregresji, wykorzystującego dane rzeczywiste. Najważniejszą wielkością w modelu hybrydowym jest parametr wagowy, określający udział informacji *a priori*. Jego optymalna wartość może zostać oszacowana bądź wyznaczona po estymacji modeli warunkowych. Modele DSGE-VAR są często wykorzystywane w badaniach empirycznych. Istotne wydaje się zatem przeanalizowanie wrażliwości wnioskowania na zmianę przyjmowanych założeń *a priori* dotyczących parametru wagowego. Całość wniosków empirycznych dotyczy hybrydowego modelu wektorowej autoregresji, uzyskanego pod warunkiem przyjęcia pewnych założeń wynikających z modelu równowagi ogólnej i ustalonego zbioru obserwacji.

Niniejsza praca jest poświęcona sposobom optymalnego wyznaczania parametru wagowego, specyfikacji jego rozkładu *a priori*, a także analizie zmienności brzegowej gęstości obserwacji, traktowanej jako podstawowe kryterium porównywania modeli. Skoncentrowano się na dwóch możliwych podejściach do wyznaczania optymalnego udziału informacji *a priori* w modelu połączonym: przez estymację parametrów modeli warunkowych przy zadanych arbitralnie wartościach parametru wagowego oraz przez estymację modelu pełnego. Głównym celem pracy jest potwierdzenie, czy oceny logarytmu brzegowej gęstości obserwacji zależą od metody szacowania modeli warunkowych względem parametru wagowego podczas jego estymacji. W zakresie specyfikacji rozkładu *a priori* parametru wagowego zaproponowano technikę pokazującą implikowany rozkład *a priori* wagi modelu strukturalnego w hybrydowym, w zależności od przyjęcia danego rozkładu *a priori* parametru wagowego. Procedura ta umożliwi również określenie, jaki rozkład *a priori* parametru wagowego powstaje po przyjęciu określonego rozkładu *a priori* wag modelu strukturalnego w modelu hybrydowym. Specyfikację rozkładu *a priori* parametru wagowego uzupełniają rozważania, jak jego rodzaje wpływają na wnioskowanie *a posteriori*. W szczególności podjęto próbę ujednolicenia informacji wstępnej o parametrze wagowym, przez przyjęcie różnych rozkładów *a priori*, o porównywalnych charakterystykach. Zaproponowano, aby wnioskowanie *a posteriori* o optymalnym udziale informacji *a priori* w modelu hybrydowym oprzeć na brzegowym rozkładzie *a posteriori* wag modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, ze względu na możliwość dokonania interpretacji ekonomicznej wag oraz obliczenia dla nich wartości oczekiwanej *a posteriori* i miar niepewności wnioskowania. Alternatywne specyfikacje rozkładu *a priori* parametru wagowego zostały wykorzystane do oceny brzegowej gęstości obserwacji i zilustrowania jej zmienności. Przeprowadzone symulacje pozwoliły odpowiedzieć na pytanie, czy lepiej estymować parametr wagowy czy szacować modele warunkowe w odniesieniu do arbitralnie ustalonego zakresu wartości. Rozważania uzupełniono porównaniem ocen brzegowej gęstości obserwacji w hybrydowych modelach wektorowej autoregresji z jej oceną w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie.

Pierwsza część pracy przedstawia zagadnienia budowy i wnioskowania w modelu DSGE-VAR, niezbędne do naświetlenia decydującej roli parametru wagowego, w szczególności zamieszczono schemat konstrukcji modelu pomocniczego i rozkładu *a priori* oraz zaprezentowano rozkład *a posteriori* w modelu połączonym. Drugą część pracy poświęcono analizie zmienności wnioskowania w zależności od sposobu traktowania *a priori* parametru wagowego. Najpierw zaprezentowano estymację modeli warunkowych, następnie zaproponowano procedurę analizy rozkładu *a priori* wag w zależności od przyjętego rozkładu parametru wagowego. Rozważano rozkład jednostajny, gamma i ucięty normalny. Pracę podsumowuje prezentacja empirycznych wyników estymacji optymalnej wagi rozkładu *a priori* w modelu hybrydowym, próba ich porównania z rezultatami uzyskanymi za pomocą modeli warunkowych względem parametru wagowego oraz omówienie ocen brzegowej gęstości obserwacji.

2. Pomocniczy model wektorowej autoregresji

Specyfikacja DSGE-VAR, pozwalająca na połączenie wnioskowania na podstawie modeli równowagi ogólnej z modelami wektorowej autoregresji, została zaproponowana w pracy Del Negro i Schorfheide'a (2004), a następnie rozwinięta przez Del Negro i in. (2007) oraz omówiona m.in. w następujących pracach: An i Schorfheide (2007), Christiano (2007) i Del Negro i Schorfheide (2006). Ogólnie polega ona na wykorzystaniu modelu równowagi ogólnej do skonstruowania rozkładu *a priori* wektorowej autoregresji, co pozwala połączyć zalety obydwu podejść: modelu strukturalnego, opartego na teorii ekonomii, z elastycznością wektorowej autoregresji. Specyfikacja rozkładu *a priori* parametrów wektorowej autoregresji opiera się na liniowym rozwiązaniu modelu równowagi ogólnej, zapisanym w formie reprezentacji w przestrzeni stanów:

$$s_t = As_{t-1} + B\varepsilon_t$$

$$Y_t = F + Cs_t + v_t$$

gdzie:

s_t – wektor stanu,

A i B – elementy macierzy, będące nieliniowymi funkcjami θ , wynikającymi z rozwiązania postaci zlinearyzowanej modelu strukturalnego,

v_t – wektor zakłóceń losowych w równaniu obserwacji, najczęściej o rozkładzie normalnym, $v_t \sim N^{(n)}(0, \Sigma_v)$,

ε_t – wektor innowacji związanych z egzogenicznymi zakłóceniami losowymi występującymi w postaci strukturalnej, $\varepsilon_t \sim N^{(n')} (0, \Sigma_\varepsilon)$,

F i C – wektor i macierz znanych stałych bądź parametrów podlegających oszacowaniu.

Model równowagi ogólnej jest tutaj traktowany jako podstawa konstruowania rozkładu *a priori*, za którego pośrednictwem w wektorowej autoregresji wprowadza się założenia znane z teorii ekonomii leżące u podstaw jego konstrukcji. Do budowy rozkładu *a priori* wykorzystuje się formalne wnioskowanie na podstawie pomocniczego modelu wektorowej autoregresji, który stanowi przybliżenie modelu strukturalnego. Aproksymacja rozwiązania liniowej postaci modelu równowagi

ogólnej za pomocą wektorowej autoregresji wymaga wprowadzenia wielu restrykcji wiążących jej współczynniki, wynikających z modelu strukturalnego. Zlinearyzowaną postać modelu strukturalnego można przekształcić w model wektorowej autoregresji w wyniku przekształcenia funkcyjnego wektora parametrów θ w macierz współczynników $\tilde{\Phi}$ i macierz kowariancji $\tilde{\Sigma}_u$ pomocniczej autoregresji:

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{\Phi} + \tilde{U}$$

która w przypadku jednej obserwacji wektorowej ma postać:

$$\tilde{Y}_t = \tilde{\Phi}_0 + \sum_{i=1}^p \tilde{\Phi}_i \tilde{Y}_{t-i} + \tilde{u}_t = \tilde{\Phi}' \tilde{X}_t + \tilde{u}_t$$

gdzie:

- $\tilde{Y}_t$ – wektor $(n \times 1)$ zawierający zmienne endogeniczne, odpowiadające zmiennym w równaniu obserwacji modelu równowagi ogólnej, który został przyjęty do generowania rozkładu *a priori* parametrów modelu hybrydowego,
- $\tilde{Y}$ – macierz o wymiarach $(\tilde{T} \times n)$, składająca się z $\tilde{Y}_t'$ wierszy,
- $\tilde{T}$ – liczebność teoretycznej próby,
- $\tilde{\Phi}' = [\tilde{\Phi}_0' \ \tilde{\Phi}_1' \dots \tilde{\Phi}_p']$,
- $\tilde{\Phi}$ – macierz $((1 + np) \times n)$ współczynników autoregresji,
- $\tilde{X}$ – macierz $(\tilde{T} \times (1 + np))$ o wierszach $\tilde{X}_t' = [1 \ \tilde{Y}_{t-1}' \ \tilde{Y}_{t-2}' \dots \tilde{Y}_{t-p}']$,
- $\tilde{X}_t$ – wektor $((1 + np) \times 1)$,
- $\tilde{U}$ – macierz $(\tilde{T} \times n)$ składająca się z wierszy $\tilde{u}_t'$,
- $\tilde{u}_t \sim iidN^{(n)}(0, \tilde{\Sigma}_u)$ – wektor $(n \times 1)$ zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym, z zerowym wektorem wartości oczekiwanych i macierzą kowariancji $\tilde{\Sigma}_u$, $t = 1, \dots, \tilde{T}$.

Funkcja wiarygodności w tym przypadku ma standardową postać:

$$\begin{aligned} \ell(\Phi, \Sigma_u | \tilde{Y}) &= (2\pi)^{-n\tilde{T}/2} \det(\Sigma_u)^{-\tilde{T}/2} \exp\{-0.5 \text{tr}[\tilde{\Sigma}_u^{-1}(\tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{\Phi})'(\tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{\Phi})]\} = \\ &= (2\pi)^{-n\tilde{T}/2} \det(\Sigma_u)^{-\tilde{T}/2} \exp\{-0.5 \text{tr}[\tilde{\Sigma}_u^{-1}(\tilde{Y}'\tilde{Y} - (\tilde{X}\tilde{\Phi})'\tilde{Y} - \tilde{Y}'\tilde{X}\tilde{\Phi} + (\tilde{X}\tilde{\Phi})'\tilde{X}\tilde{\Phi})]\} \end{aligned}$$

gdzie $\text{tr}()$ oznacza ślad macierzy.

Odwzorowanie parametrów strukturalnych θ w macierze $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\Sigma}_u$ uzyskuje się przez formalne wnioskowanie z wykorzystaniem teoretycznych momentów pierwszego i drugiego rzędu zmiennych $\tilde{Y}_t$ i $\tilde{X}_t$. Są one bezpośrednio zależne od parametrów modelu równowagi ogólnej i wyrażają się wartościami oczekiwanymi $E_\theta(\cdot)$, wyznaczanymi względem rozkładu prawdopodobieństwa θ : $\Gamma_{xx}^*(\theta) = E_\theta(\tilde{X}_t \tilde{X}_t')$, $\Gamma_{xy}^*(\theta) = E_\theta(\tilde{X}_t \tilde{Y}_t')$, $\Gamma_{yy}^*(\theta) = E_\theta(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_t')$ i $\Gamma_{yx}^*(\theta) = \Gamma_{xy}^{*'}(\theta)$.

Zastąpienie momentów empirycznych danych sztucznych $\tilde{Y}$ i $\tilde{X}$ ich momentami teoretycznymi ma na celu eliminację dodatkowej niepewności związanej z ich zmiennością próbkową (Del Negro, Schorfheide 2002). Liczebność danych sztucznych $\tilde{T}$ jest powiązana z liczebnością danych obserwowalnych T za pośrednictwem zależności określającej parametr wagowy λ : $\tilde{T} = \lambda T$.

Istnienie rozkładu *a posteriori* wymaga spełnienia warunku $\lambda \geq (n + k^*)/T$, gdzie k^* oznacza kolumny macierzy $\tilde{X}$. Część formuł momentów teoretycznych zamieścili w swojej pracy Warne, Coenen, Christoffel (2012); wcześniej zostały one wprowadzone do pakietu Dynare (Adjemian i in. 2011); poniżej zaprezentowano ich wyprowadzenie.

W funkcji wiarygodności zamiast momentów empirycznych zmiennych danych sztucznych $\tilde{Y}_t$ i $\tilde{X}_t$ przyjęto ich przeskalowane momenty teoretyczne:

$$\ell^*(\Phi, \Sigma_u | \tilde{Y}) \propto \det(\Sigma_u)^{-n\tilde{T}/2} \exp\{-0,5\text{tr}[\tilde{T}\tilde{\Sigma}_u^{-1}(\Gamma_{yy}^*(\theta) - \tilde{\Phi}'\Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}'\Gamma_{xx}^*(\theta)\tilde{\Phi})]\}$$

gdzie $\propto$ oznacza znak proporcjonalności.

Przy założeniu nieinformacyjnego rozkładu *a priori* dla macierzy współczynników $\tilde{\Phi}$ i macierzy kowariancji $\tilde{\Sigma}_u$:

$$p(\tilde{\Phi}, \tilde{\Sigma}_u) \propto \det(\tilde{\Sigma}_u)^{-(n+1)/2}$$

proceedzi to do łącznego rozkładu *a posteriori* o postaci:

$$p(\tilde{\Phi}, \tilde{\Sigma}_u | \theta) \propto \det(\tilde{\Sigma}_u)^{-(\tilde{T}+n+1)/2} \exp\{-0,5\text{tr}[\tilde{T}\tilde{\Sigma}_u^{-1}(\Gamma_{yy}^*(\theta) - \tilde{\Phi}'\Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}'\Gamma_{xx}^*(\theta)\tilde{\Phi})]\}$$

na podstawie którego otrzymujemy układ warunkowych rozkładów *a posteriori*.

Brzegowy rozkład *a posteriori* macierzy kowariancji $\tilde{\Sigma}_u$, przy ustalonym θ , ma formę odwróconego rozkładu Wisharta, $IW(\cdot)$ (Zellner 1971):

$$p(\tilde{\Sigma}_u | \theta) = IW(\tilde{T}\tilde{\Sigma}_u(\theta), \tilde{T} - (1 + np), n)$$

Z kolei, pod warunkiem $\tilde{\Sigma}_u$ i θ , rozkład *a posteriori* współczynników autoregresji $\tilde{\Phi}$ ma formę rozkładu macierzowego normalnego, $MN(\cdot)$ (Poirer 1995):

$$p(\tilde{\Phi} | \tilde{\Sigma}_u, \theta) = MN_{(1+np) \times n}(\hat{\tilde{\Phi}}(\theta), \tilde{T}\Gamma_{xx}^*(\theta), (\tilde{\Sigma}_u)^{-1})$$

gdzie macierze parametrów $\hat{\tilde{\Phi}}(\theta)$ i $\hat{\tilde{\Sigma}}_u(\theta)$, dane przez:

$$\hat{\tilde{\Phi}}(\theta) = [\Gamma_{xx}^*(\theta)]^{-1}\Gamma_{xy}^*(\theta)$$

$$\hat{\tilde{\Sigma}}_u(\theta) = \Gamma_{yy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)[\Gamma_{xx}^*(\theta)]^{-1}\Gamma_{xy}^*(\theta)$$

są estymatorami największej wiarygodności i metody najmniejszych kwadratów macierzy współczynników $\tilde{\Phi}$ i macierzy kowariancji $\tilde{\Sigma}_u$.

Macierz $\Gamma_{xx}^*(\theta)$ jest odwracalna, jeśli w modelu równowagi ogólnej liczba zakłóceń występujących w postaci strukturalnej jest równa liczbie n obserwowanych szeregów czasowych w równaniu obserwacji (Del Negro, Schorfheide 2004). Macierze $\tilde{\Phi}(\theta)$ i $\tilde{\Sigma}_u(\theta)$ nazywane są funkcjami ograniczeń (ang. *restriction function*), które po nałożeniu na parametry wektorowej autoregresji bez restrykcji powodują, że naśladuje ona model równowagi ogólnej, stając się jego aproksymacją i tworząc model wektorowej autoregresji z ograniczeniami.

Równania strukturalne modeli równowagi ogólnej sprowadzone do postaci logarytmiczno-liniowej mają zwykle reprezentację w postaci wektorowej autoregresji ze średnią ruchomą. Sposób aproksymacji takiej reprezentacji zależy od tego, jak precyzyjnie jest ona przybliżana przez wektorową autoregresję. W praktyce liczba opóźnień jest niska. Zagadnienie to, ściśle zależne od danego modelu równowagi ogólnej, zostało omówione m.in. w pracach: Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez, Sargent (2005); Fernández-Villaverde i in. (2007), a także Christiano, Eichenbaum, Vigfusson (2006), Ravenna (2006), Chari, Kehoe, McGrattan (2008) i Kolasa, Rubaszek, Skrzypczyński (2012) i w szerszym kontekście w Favero (2007). W części empirycznej przyjęto model równowagi ogólnej, w przypadku którego reprezentacja wektorowej autoregresji i jej własności zostały dokładnie przedstawione w pracy Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez, Sargent (2005).

3. Postać analityczna funkcji restrykcji

Rozwiązanie modelu strukturalnego w formie równania stanu jest dyskretnym liniowym systemem dynamicznym rzędu pierwszego, którego wartość oczekiwana oraz momenty drugiego rzędu, dla ustalonego θ , mogą zostać wyznaczone analitycznie. Wektor wartości oczekiwanej zmiennych endogenicznych modelu równowagi ogólnej w stanie ustalonym $E(Y_t)$ jest równy F . Scentrowana macierz kowariancji wektora Y_t , wyznaczona na podstawie reprezentacji modelu strukturalnego w przestrzeni stanów, jest określona przez $\Sigma_y^{(0)} = C'\Sigma_s C + \Sigma_v$, natomiast pozostałe macierze (scentrowanych) autokowariancji są wyrażone formułą $\Sigma_y^{(j)} = C' A^j \Sigma_s C$, dla $j = 1, 2, \dots, p$, oraz $\Sigma_y^{(j)} = \Sigma_y^{(-j)}$ (Warne, Coenen, Christoffel 2012). Macierz kowariancji zmiennych stanu w stanie ustalonym Σ_s jest bezpośrednio obliczana po rozwiązaniu równania Lapunowa:

$$A\Sigma_s A' + B\Sigma_\varepsilon B' = \Sigma_s$$

które jest otrzymywane na podstawie definicji macierzy kowariancji wektora stanu:

$$E[(s_t - \bar{s})(s_t - \bar{s})'] = E[(As_{t-1} + B\varepsilon_t)(As_{t-1} + B\varepsilon_t)'] = A\Sigma_{s,(t)} A' + B\Sigma_{\varepsilon,(t)} B' = \Sigma_{s,(t)}$$

przy założeniu niezmienności w czasie $\Sigma_{s,(t)} = \Sigma_s$ i macierzy kowariancji szoków strukturalnych $\Sigma_{\varepsilon,(t)} = \Sigma_\varepsilon$, spełnienia przez macierz A warunków stabilności, niezależności wektora stanu s_t od wektora zakłóceń strukturalnych ε_t oraz $E(s_t) = \bar{s} = 0$.

Aproksymacja modelu równowagi ogólnej za pomocą modelu wektorowej autoregresji bez restrykcji jest dokonywana przez zastąpienie jej współczynników $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\Sigma}_u$ parametrami indukowanymi przez model strukturalny $\tilde{\Phi}(\theta)$ i $\tilde{\Sigma}_u(\theta)$, uzyskanymi na podstawie autoregresji dla momentów teoretycznych, warunkowo względem θ . Wartość oczekiwana wektora Y_t jest równa $E(Y_t) = F$

w modelu strukturalnym i $E(\tilde{Y}_t) = \Phi'(\theta)\tilde{X}_t$ w wektorowej autoregresji. Macierze niescentrowanych momentów drugiego rzędu zmiennych obserwowalnych $\tilde{Y}_t$ i $\tilde{X}_t$, względem rozkładu parametrów modelu strukturalnego θ są dane przez wartości oczekiwane (Warne, Coenen, Christoffel 2012):

$$\begin{aligned} E_\theta(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_t') &= E_\theta[(\tilde{\Phi}' \tilde{X}_t + \tilde{u}_t)(\tilde{\Phi}' \tilde{X}_t + \tilde{u}_t)'] = E_\theta[(\tilde{\Phi}' \tilde{X}_t (\tilde{\Phi}' \tilde{X}_t)') + E_\theta(\tilde{u}_t \tilde{u}_t')] = \\ &= \tilde{\Phi}' X_t X_t \tilde{\Phi} + \tilde{\Sigma}_u = FF' + \Sigma_y^{(0)} = \Gamma_{yy}^*(\theta) \end{aligned}$$

gdzie $E(Y_t Y_t') = FF' + \Sigma_y^{(0)}$ w modelu równowagi ogólnej,

$$E_\theta(\tilde{X}_t \tilde{X}_t') = E \begin{bmatrix} 1 & \tilde{Y}_{t-1}' & \dots & \tilde{Y}_{t-p}' \\ \tilde{Y}_{t-1} & \tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_{t-1}' & \dots & \tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_{t-p}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Y}_{t-p} & \tilde{Y}_{t-p} \tilde{Y}_{t-1}' & \dots & \tilde{Y}_{t-p} \tilde{Y}_{t-p}' \end{bmatrix} = E_\theta \begin{bmatrix} 1 & F & \dots & F \\ F & \Sigma_y^{(0)} & \dots & \Sigma_y^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F & \Sigma_y^{p-1} & \dots & \Sigma_y^{(0)} \end{bmatrix} = \Gamma_{xx}^*(\theta)$$

dla $E_\theta(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-j}') = E_\theta[(\tilde{\Phi}' \tilde{X}_t + \tilde{u}_t)(\tilde{\Phi}' \tilde{X}_{t-j} + \tilde{u}_{t-j})'] = FF' + \Sigma_y^{(j)}$, $E_\theta(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-j}') = E_\theta(\tilde{Y}_{t-j} \tilde{Y}_t')$ oraz:

$$E_\theta(\tilde{X}_t \tilde{Y}_t') = E_\theta \begin{bmatrix} \tilde{Y}_t' \\ \tilde{Y}_{t-1} \tilde{Y}_t' \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{t-p} \tilde{Y}_t' \end{bmatrix} = E_\theta \begin{bmatrix} F' \\ FF' + \Sigma_y^{(1)} \\ \vdots \\ FF' + \Sigma_y^{(p)} \end{bmatrix} = \Gamma_{xy}^*(\theta)$$

przy czym $E_\theta(\tilde{X}_t \tilde{Y}_t') = E_\theta(\tilde{Y}_t \tilde{X}_t') = \Gamma_{yx}^*(\theta)$.

Model wektorowej autoregresji $\tilde{Y}_t$ względem $\tilde{X}_t$, bazujący na momentach teoretycznych, determinuje odwzorowanie funkcyjne parametrów modelu równowagi ogólnej θ w parametry wektorowej autoregresji $\hat{\Phi}(\theta)$ i $\hat{\Sigma}_u(\theta)$.

4. Hybrydowy model wektorowej autoregresji

Model wektorowej autoregresji rzędu p bez restrykcyj ma postać:

$$Y = X\Phi + U$$

gdzie:

$Y_{(T \times n)}$ składa się z wierszy Y_t' ,

Y_t oznacza kolumnę $(n \times 1)$ zmiennych obserwowalnych,

$X_{(T \times (1+np))}$ składa się z wierszy $X_t' = [1 \ Y_{t-1}' \ Y_{t-2}' \dots Y_{t-p}']$,

$\Phi = [\Phi_0' \Phi_1' \dots \Phi_p']'$ jest macierzą $((1 + np) \times n)$ współczynników wektorowej autoregresji, Φ_i dla $i = 1, \dots, p$ są macierzami $(n \times n)$, Φ_0 jest wektorem $(n \times 1)$ wyrazów wolnych, $U_{(T \times n)}$ składa się z wierszy u_t' , $u_t \sim N^{(n)}(0, \Sigma_u)$ jest wektorem $(n \times 1)$ zakłóceń losowych, dla którego zakładamy n -wymiarowy rozkład normalny, o wektorze wartości oczekiwanych równym wektorowi zerowemu, $E(u_t) = 0$, i macierzy kowariancji $E(u_t u_t') = \Sigma_u$, o wymiarach $(n \times n)$, U_t i X_t są niezależne, $E(u_t u_{t-j}') = 0$.

Hybrydowy model wektorowej autoregresji powstaje po przyjęciu dla Φ i Σ_u rozkładu *a priori* $p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$, określonego przez rozkład *a posteriori* w pomocniczym modelu wektorowej autoregresji $p(\tilde{\Phi}, \tilde{\Sigma}_u | \theta)$, i prowadzi do połączenia restrykcji wynikających z modelu równowagi ogólnej z danymi obserwowanymi.

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów hybrydowej wektorowej autoregresji Φ i Σ_u , proporcjonalny do iloczynu funkcji wiarygodności $\ell(\Phi, \Sigma_u | Y)$ i rozkładu *a priori* $p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) \propto \ell(\Phi, \Sigma_u | Y) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$$

gdzie $\ell(\Phi, \Sigma_u | Y) \propto \det(\Sigma_u)^{-T/2} \exp\{-0.5 \text{tr}[\Sigma_u^{-1}(Y - X\Phi)'(Y - X\Phi)]\}$, przy ustalonym wektorze wartości początkowych $Y_{1-p}, \dots, Y_0$, ma postać rozkładu macierzowego normalnego odwróconego Wisharta:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) \propto \det(\Sigma_u)^{-[(1+\lambda)T+n+1]/2} \exp\{-0.5 \text{tr}\{\Sigma_u^{-1}[(Y - X\Phi)'(Y - X\Phi) + \lambda T(\Gamma_{yy}^*(\theta) - \Phi' \Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)\Phi + \Phi' \Gamma_{xx}^*(\theta)\Phi)]\}\}$$

W rezultacie otrzymujemy następujący układ warunkowych rozkładów *a posteriori*:

$$p(\Sigma_u | Y, \theta, \lambda) = IW((\lambda + 1)T \hat{\Sigma}_u^m(\theta), (1 + \lambda)T - (1 + np), n)$$

$$p(\Phi | Y, \Sigma_u, \theta, \lambda) = MN_{(1+np) \times n}(\Phi^m(\theta), (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X'X), \Sigma_u^{-1})$$

gdzie:

$$\hat{\Phi}^m(\theta) = (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + X'X)^{-1}(\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + X'Y)$$

$$\hat{\Sigma}_u^m(\theta) = [(\lambda + 1)T]^{-1}[(\lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta) + Y'Y) - (\lambda T \Gamma_{yx}^*(\theta) + Y'X) \hat{\Phi}^m(\theta)]$$

Wartości oczekiwane *a posteriori* współczynników hybrydowej wektorowej autoregresji $\hat{\Phi}^m(\theta)$ i macierzy kowariancji $\hat{\Sigma}_u^m(\theta)$ są funkcją momentów teoretycznych, pochodzących z liniowego rozwiązania modelu równowagi ogólnej, i momentów empirycznych danych obserwowalnych, o udziałach zależących od parametru wagowego λ . Stopień informacyjności rozkładu *a priori* jest ściśle związany z poziomem λ , który również określa, na ile restrykcje wynikające

z teorii ekonomii, ujęte poprzez model strukturalny, są potwierdzane przez obserwacje. Jeśli λ przyjmuje wartości bliskie dolnej granicy $\lambda_{\min} = (n + k^*)/T$, to restrykcje ekonomiczne są w nikłym stopniu potwierdzane przez obserwacje. Jeśli natomiast $\lambda \rightarrow \infty$, świadczy to o poprawnej specyfikacji modelu równowagi ogólnej.

Optymalna wartość parametru wagowego może być ustalona po estymacji modeli warunkowych względem $\lambda \in \Lambda = \{l_1, \dots, l_q\}$ i wyborze takiego, który maksymalizuje brzegową gęstość obserwacji: $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda > 0} p(Y|\lambda)$, bądź po oszacowaniu modelu pełnego, gdzie λ traktujemy jako dodatkowy, estymowany parametr. Jako ocenę punktową $\hat{\lambda}$ przyjmuje się wtedy wartość oczekiwaną brzegowego rozkładu *a posteriori* λ . Charakterystyki rozkładu *a posteriori* w hybrydowym modelu wektorowej autoregresji są otrzymywane numerycznie, za pomocą algorytmu Metropolis'a i Hastingsa (zob. Schorfheide 2000; Del Negro 2004; Adjemian, DarracqPariès, Moyen 2008). Brzegowa gęstość obserwacji w części empirycznej jest przybliżana za pomocą zmodyfikowanej średniej harmonicznej (Geweke 1999). Jej przybliżenie można również uzyskać przez aproksymację Laplace'a łącznego rozkładu *a posteriori* (Kass, Raftery 1995). Formalne porównanie mocy wyjaśniającej modeli opiera się na czynnikach Bayesa.

5. Model równowagi ogólnej

W specyfikacji rozkładu *a priori* w hybrydowym modelu wektorowej autoregresji na potrzeby niniejszej analizy wykorzystuje prosty model nowokeynesowski, zaproponowany w artykule Ercega, Hendersona i Levina (2000), wykorzystywany również do zilustrowania zagadnień estymacyjnych w pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005) i służący jako podstawa do budowy bardziej skomplikowanych modeli (m.in. Christiano, Eichenbaum, Evans (2005). Konstrukcję równań strukturalnych przyjętego modelu równowagi ogólnej przedstawiają m.in. prace Wróbel-Rotter (2011a; 2011c; 2012b), omówienie zagadnień estymacji i metod numerycznych: Wróbel-Rotter (2007a; 2008; 2012a), prezentację technik oceny stabilności rozwiązania i zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej: Wróbel-Rotter (2011b; 2013b). Wprowadzenie w tematykę i przegląd zagadnień metodologicznych zawierają m.in. prace: Wróbel-Rotter (2007b; 2007c; 2008; 2012c; 2012d). Szczegółowe omówienie metodologii wnioskowania w modelach hybrydowych DSGE-VAR wraz z ilustracjami empirycznymi zawierają prace: Wróbel-Rotter (2013a; 2013c).

W skład modelu o zmiennych zapisanych w formie procentowych odchyłeń od ich wartości w stanie ustalonym wchodzi następujące równania strukturalne:

1. Równanie Eulera wiążące wzrost produkcji z realną stopą procentową:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma(r_t - E_t \pi_{t+1} + E_t g_{t+1} - g_t)$$

gdzie:

- y_t – produkcja,
- r_t – nominalna stopa procentowa,
- g_t – zakłócenie funkcji użyteczności,
- π_t – wskaźnik inflacji,
- σ – elastyczność międzyokresowej substytucji.

2. Funkcja produkcji i funkcja realnego kosztu krańcowego produkcji:

$$y_t = a_t + (1 - \alpha)n_t \quad \text{ i } \quad mc_t = w_t^r + n_t - y_t$$

gdzie:

- n_t – liczba przepracowanych godzin,
- a_t – zakłócenie technologiczne,
- mc_t – realny koszt krańcowy,
- w_t^r – płaca realna,
- δ – udział kapitału w produkcji.

3. Krańcowa stopa substytucji między konsumpcją a liczbą przepracowanych godzin:

$$mrs_t = \sigma^{-1} y_t + \gamma n_t - g_t$$

gdzie γ jest odwrotnością elastyczności podaży pracy względem realnej płacy.

4. Równanie inflacji cenowej z wbudowanym mechanizmem Calvo (1983) o postaci:

$$\pi_t = \beta E_t(\pi_{t+1}) + \frac{(1 - \alpha)(1 - \theta\beta)(1 - \theta)}{\theta(1 + \alpha(\bar{\varepsilon} - 1))} (mc_t + \varepsilon_t^\lambda)$$

gdzie:

- $\bar{\varepsilon}$ – wartość w stanie ustalonym elastyczności substytucji pomiędzy różnymi kategoriami dóbr,
- ε_t^λ – zakłócenie w narzucie cenowym,
- θ – prawdopodobieństwo braku możliwości optymalizacji ceny w ustalonym okresie,
- β – czynnik dyskontujący.

5. Równanie inflacji płacowej z wbudowanym mechanizmem Calvo (1983) o postaci:

$$\pi_t^w = \beta E_t \pi_{t+1}^w + \frac{(1 - \beta\theta_w)(1 - \theta_w)}{\theta_w(1 + \gamma\varepsilon_w)} (mrs_t - w_t^r)$$

gdzie:

- θ_w – prawdopodobieństwo braku możliwości optymalizacji płacy w ustalonym okresie,
- ε_w – elastyczność substytucji pomiędzy różnymi rodzajami kwalifikacji, składającymi się na zagregowany nakład pracy występujący w funkcji produkcji.

6. Reguła Taylora:

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1 - \rho_r)(\gamma_\pi \hat{\pi}_t + \gamma_y y_t) + \varepsilon_t^z$$

gdzie:

γ_π i γ_y – długookresowe odpowiedzi banku centralnego na odchylenia inflacji i produkcji od ich wartości w stanie stabilnym,

ρ_r – parametr wygładzania stopy procentowej,

ε_t^z – zakłócenie w regule stopy procentowej.

7. Równanie łączące wzrost płacy realnej z płacą nominalną i inflacją cenową:

$$w_t^r = w_{t-1}^r + \pi_t^w - \pi_t$$

8. Równanie procesów stochastycznych opisujących wzrost technologii i zmiany w preferencjach:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad \text{ i } \quad g_t = \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_t^g$$

gdzie ε_t^a i ε_t^g oznaczają zakłócenia losowe.

Równania tworzą liniowy system racjonalnych oczekiwań kształtowany w czasie przez wektor czterech zakłóceń strukturalnych: $\varepsilon_t^* = [\varepsilon_t^a \ \varepsilon_t^g \ \varepsilon_t^z \ \varepsilon_t^\lambda]'$, o niezależnych, identycznych rozkładach normalnych, z odchyleniami standardowymi odpowiednio: σ_a , σ_g , σ_z oraz σ_λ . Wektor θ wszystkich parametrów strukturalnych ma następującą postać: $[\alpha \ \sigma \ \beta \ \gamma \ \varepsilon \ \theta \ \rho_r \ \gamma_\pi \ \gamma_y \ \rho_a \ \rho_g \ \theta_w \ \varepsilon_w]'$. Cztery z tych parametrów nie podlegają estymacji. Szacowane parametry stochastycznej struktury zakłóceń oznaczono przez: σ_a , σ_g , σ_z oraz σ_λ . Model oszacowano, za zgodą autorów, na danych z gospodarki amerykańskiej, przygotowanych na potrzeby pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005), gdzie jako jeden z przykładów rozważono model przyjęty w niniejszym artykule. Dane empiryczne obejmują 75 wartości kwartalnych, dotyczących krótkoterminowej stopy procentowej (r_t^{obs}), realnej płacy (w_t^{obs}), stopy wzrostu zagregowanej produkcji (y_t^{obs}) i inflacji cenowej (Δp_t^{obs}). Pierwotnie zaczerpnięto je z Bureau of Labor Statistics oraz Federal Reserve System. Równanie obserwacji zostało zapisane tak, aby $r_t^{obs} = r_t$, $w_t^{obs} = w_t^r$, $y_t^{obs} = y_t$ oraz $\pi_t^{obs} = \hat{\pi}_t$.

Na podstawie czterech pierwszych obserwacji wyznaczono warunki początkowe, niezbędne do zapisania wektorowej autoregresji, co oznacza, że wszystkie modele hybrydowe oraz model równowagi ogólnej zostały oszacowane na tym samym zbiorze danych. Parametry rozkładów *a priori* i wartości parametrów kalibrowanych: $\beta = 0,99$, $\bar{\varepsilon} = 6$, $\alpha = 0,36$ i $\varepsilon_w = 6$, zaczerpnięto z pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005). Otrzymane wartości oczekiwane *a posteriori* w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie, 90-procentowe przedziały największej wiarygodności *a posteriori* oraz przyjęte rozkłady *a priori* zawiera tabela 1. Specyfikację tę wykorzystano również do skonstruowania rozkładu *a priori* podczas estymacji hybrydowych modeli wektorowej autoregresji. Ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie wynosi 1174 i jest niższa niż wartości uzyskane w wybranych modelach hybrydowych, prezentowanych poniżej. Zarówno model równowagi ogólnej, jak i modele hybrydowe sprawdzono pod względem stabilności numerycznej; przeanalizowano dostępne w pakiecie Dynare diagnostyki oraz dodatkowo obliczono średnie ergodyczne, wskazujące na stabilizację ocen parametrów.

6. Estymacja modeli warunkowych względem parametru wagowego

Estymacja parametru modelu hybrydowego pod warunkiem znajomości parametru wagowego λ została przeprowadzona dla dwóch zbiorów jego wartości. Pierwszy z nich odpowiada dziesięciu jednakowo odległym punktom, w przybliżeniu od 0,1 do 1, z krokiem 0,1, oznaczającym różne wagi $W_i = \lambda_i / (1 + \lambda_i)$ modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym:

$$\Lambda = \{0,3; 0,43; 0,67; 1; 1,5; 2,33; 4; 9; 19; 1000\}$$

Drugi ma natomiast na celu doprecyzowanie oszacowania λ w obszarze wysokich wartości brzegowych gęstości obserwacji:

$$\Lambda^* = \{0,32; 0,35; 0,39; 0,43; 0,47; 0,52; 0,56; 0,61; 0,67; 0,72; \\ 0,79; 0,85; 0,92; 1; 1,08; 1,17; 1,27; 1,38; 1,5; 1,63\}$$

Odpowiada on watom W_i od 0,24 do 0,62, z krokiem 0,02. Został ustalony po wykonaniu estymacji dla $\lambda \in \Lambda$. Wartość $\lambda = 1$ oznacza 50-procentową wagę modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym i 50-procentową wagę wektorowej autoregresji bez restrykcji. Model hybrydowej wektorowej autoregresji rozpatrzono dla czterech rzędów opóźnienia, od $p = 1$ do $p = 4$, które oszacowano dla każdej wartości λ . Dolna granica możliwych wartości parametru wagowego $\lambda \in (\lambda_{\min}; \infty)$, $\lambda_{\min} = (1 + n(p + 1))/T$, wynosi odpowiednio: $\lambda_{\min} = 0,127$ dla $p = 1$, $\lambda_{\min} = 0,183$ dla $p = 2$, $\lambda_{\min} = 0,239$ dla $p = 3$ i $\lambda_{\min} = 0,296$ dla $p = 4$. Wzrost minimalnej λ , wynikający z warunków istnienia rozkładu *a priori*, można interpretować jako konieczność zwiększenia jego informacyjności, rekompensującą większą elastyczność wektorowej autoregresji, spowodowaną wzrostem liczby swobodnych parametrów przy zwiększaniu rzędu jej opóźnienia. Oprogramowanie Dynare stosowane do estymacji DSGE-VAR zapewnia spełnienie warunku ograniczającego λ , prowadzącego do istnienia rozkładu *a priori*, pochodzącego z modelu równowagi ogólnej. Oznacza to wyeliminowanie przypadków, kiedy $\lambda \in (0; \lambda_{\min})$.

Modele hybrydowe oszacowano, wykonując w każdym przypadku 250.000 symulacji w algorytmie Metropolisa i Hastingsa, przy czym pierwsze 20% uznano za wartości wstępne. Całość symulacji w każdym modelu składa się z pięciu równoległych łańcuchów Markowa, których punkty startowe zostały uzyskane na podstawie losowania z rozkładu normalnego skupionego wokół numerycznie wyznaczonej modalnej i macierzy kowariancji rozkładu *a posteriori*. Ich oszacowanie w modelu hybrydowym jest trudne. W tym przypadku zazwyczaj zawodzą techniki oparte na algorytmach optymalizacyjnych typu Newtona; dotyczy to m.in. standardowo stosowanych procedur: *csmmwel*, *fmincon* i *fminunc*. Z tego powodu w pakiecie Dynare wykorzystano dodatkową technikę, polegającą na losowym przeszukiwaniu przestrzeni parametrów za pomocą algorytmu Metropolisa i Hastingsa (www.dynare.org/dynarewiki/montecarlooptimization). Logarytmy brzegowej gęstości obserwacji w modelu szacowanym na zbiorze Λ ilustruje wykres 1 oraz tabela 2.

Pośród $\lambda \in \Lambda$ wartość $\lambda = 0,67$ odpowiada najwyższej wartości logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równej 1223, przy rzędzie opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji $p = 2$,

co odpowiada wadze modelu równowagi ogólnej w modelu łącznym: $W = 0,4$. Optymalny rząd opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji, równy w tym przypadku $p = 2$, ustalono w wyniku maksymalizacji brzegowej gęstości obserwacji, nie zaś na podstawie formalnych kryteriów jego wyboru. Oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji za pomocą aproksymacji Laplace'a łącznego rozkładu *a posteriori*, którego parametry zostały przybliżone za pomocą metod numerycznych, powoduje, że jej wartości są niższe. Oznacza to, że algorytm Metropolis'a i Hastingsa znajduje wyżej położone lokalne maksimum niż wstępne procedury optymalizacyjne.

Oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji ma tendencję do początkowego zwiększania się, a po osiągnięciu wartości maksymalnej stopniowo maleje, przy czym najbardziej regularną zależność otrzymujemy dla opóźnienia $p = 4$. W przypadku wartości parametru wagowego λ oscylujących wokół 1,5 ($W = 0,6$) obserwowana jest pewna nieregularność w ocenie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji dla $p = 1, 2$ i 3. W sytuacji, gdy wartość parametru wagowego jest mniejsza od około 2,33, obserwujemy, że w miarę wzrostu udziału informacji *a priori* z modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym najwyższe oszacowania brzegowych gęstości obserwacji *a posteriori* odpowiadają coraz wyższemu rzędowi opóźnień wektorowej autoregresji. Proces odwrotny zaczyna być widoczny, gdy waga W przekracza 0,8. Otrzymane rezultaty wskazują, że z punktu widzenia danych empirycznych optymalny udział modelu strukturalnego w modelu hybrydowym jest równy około 0,4 ($\lambda = 0,67$). Oznacza to, że restrykcje wynikające z modelu równowagi ogólnej są częściowo potwierdzone przez obserwacje, jednak występują również korzyści z giętkości wektorowej autoregresji bez restrykcji, a sam model strukturalny cechuje się pewną niepoprawnością specyfikacji. Ocena brzegowej gęstości obserwacji dla $\lambda = 1000$, traktowanego jako przypadek graniczny, odpowiadający $\lambda \rightarrow \infty$, waha się w zależności od opóźnienia wektorowej autoregresji. Jej najniższy poziom, równy 1173, obserwujemy dla $p = 1$ i jest to wartość w przybliżeniu taka jak w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie. Dla opóźnienia rzędu trzeciego takie poziomy otrzymujemy w wypadku $\lambda = 10.000$. Oznacza to, że przypadek graniczny $\lambda \rightarrow \infty$ zależy od rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji.

Optymalna wartość wagi modelu strukturalnego w modelu hybrydowym została doprecyzowana po obliczeniu wartości parametru wagowego ze zbioru Λ^* (por. tabela 3 i wykres 2). Najwyższą wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równą 1223,1, otrzymano dla $p = 2$, przy $\lambda = 0,79$. Odpowiada to wadze $W = 0,44$, przy czym wartość ta jest bliska oszacowaniu 1222,9 uzyskanemu dla $\lambda = 0,52$, ($W = 0,34$). Mogłoby to sugerować, że optymalny udział modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym waha się w granicach 34–44%. Dokładniejsze obliczenia wskazują jednak na znaczne zróżnicowanie oszacowań logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w zakresie od $\lambda = 0,43$ ($W = 0,3$) do $p = 1$ ($W = 0,5$), widoczne dla wszystkich czterech rzędów opóźnienia, przy czym w przypadku $p = 1$ zmienność ta jest największa. Dla wartości $\lambda = 0,72$ przy $p = 1$ otrzymujemy znacznie niższe oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równe 1051,9, którego wartość nie zmienia się po powtórzeniu symulacji Monte Carlo, sprawdzającej stabilność numeryczną wyników.

Formalne porównanie mocy wyjaśniającej modeli hybrydowych dla konkurencyjnych wartości parametru wagowego jest możliwe dzięki wykorzystaniu czynników Bayesa ($B(\lambda_p, \lambda_j)$), których wybrane wartości zawiera tabela 4. Są one obliczane względem modelu o najwyższej brzegowej gęstości obserwacji, przy ustalonej λ , w ramach danego rzędu opóźnienia modelu hybrydowego, np. $B(\lambda_p, \lambda_j = 0,79) = \exp(\ln p(Y|\lambda_j) - \ln p(Y|\lambda = 0,79))$, gdzie $\ln p(Y|\lambda_j)$ oznacza logarytm brzegowej gęsto-

ści obserwacji w modelu szacowanym dla $\lambda_i \in \Lambda^*$, obliczony względem modelu szacowanego dla $\lambda = 0,79$. Formalna interpretacja wyników porównania hybrydowych wektorowych autoregresji rzędu drugiego za pomocą skali Jeffreysa wskazuje, że dane potwierdzają model parametru wagowego $\lambda = 0,52$ niemal w takim samym stopniu jak model, w którym $\lambda = 0,79$. W praktyce oznacza to, że dostarczają one porównywalnego opisu obserwacji. Znaczą to również, że w świetle danych waga modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym może być równa 34% lub 44%. Podobne wnioski można wysnuć na podstawie oszacowania brzegowej gęstości obserwacji dla $\lambda = 0,67$ i $\lambda = 0,92$, odpowiadających wagom równym 40% i 48%. Oznaczają one, że modele te w przybliżeniu jednakowo dobrze opisują obserwacje, przy założeniu ich jednakowych prawdopodobieństw *a priori*. Modele hybrydowe, przy $p = 2$, dla $\lambda = 0,56$, $\lambda = 0,72$ i $\lambda = 0,85$, odpowiadające wagom 36%, 42% i 46%, są zdecydowanie gorsze w świetle danych niż model dla $\lambda = 0,79$ (44%). Czynniki Bayesa modelu warunkowego dla $\lambda = 0,79$ wynoszą odpowiednio: $2,3 \times 10^{-6}$; $2,1 \times 10^{-5}$ i $7,9 \times 10^{-6}$. Oznacza to, że model hybrydowy rzędu drugiego, w którym udział informacji *a priori* wynosi 44%, jest znacznie lepszy niż model, w którym waga rozkładu *a priori* jest równa 42%. Zjawisko to trudno wyjaśnić z ekonomicznego punktu widzenia. Analogiczne nieregularności w przebiegu wartości logarytmu brzegowych gęstości obserwacji i w ocenie optymalnego udziału modelu równowagi ogólnej w modelu połączonym występują w pozostałych rzędach opóźnień hybrydowej wektorowej autoregresji. Otrzymane wyniki wskazują na konieczność dokładnego weryfikowania rezultatów badań oraz ilustrują zależność konkluzji od zbioru wartości parametru wagowego.

7. Procedura specyfikacji rozkładu *a priori* parametru wagowego

Estymacja parametru wagowego wymaga przyjęcia rozkładu *a priori*, który odzwierciedla wstępne przekonania badacza co do zakresu jego możliwych wartości. W praktyce najczęściej zakładano jednostajne rozkłady *a priori* parametru wagowego, które miały oznaczać brak wstępnej informacji o wadze rozkładu *a priori* w modelu połączonym i umożliwiać rozstrzygnięcie na podstawie danych empirycznych, w jakim stopniu restrykcje ekonomiczne pozostają z nimi w zgodzie. Jednostajny rozkład λ nie indukuje rozkładu nieinformacyjnego wag W (Adjemian, DarracqPariès, Moyen 2008). Określenie, jaką postać ma rozkład *a priori* generowany dla W , na podstawie danego rozkładu λ , umożliwia symulacja wykorzystująca następującą procedurę:

- 1) losujemy L liczb losowych z rozkładu prawdopodobieństwa $p(\lambda)$,
- 2) obliczamy ilorazy: $W_l = \lambda_l / (1 + \lambda_l)$ dla $l = 1, \dots, L$,
- 3) budujemy histogram aproksymujący gęstość $p(W)$.

Analogiczną procedurę można zastosować w celu zbadania, jaki rozkład *a priori* byłby indukowany dla λ , po specyfikacji rozkładu *a priori* w kategoriach wag W modelu strukturalnego w modelu hybrydowym. W dalszej części dla λ przyjęto trzy typy rozkładów *a priori*: jednostajny, gamma i ucięty normalny, ponieważ ich dziedzina jest ograniczona do wartości parametru wagowego dodatnich i większych od λ_{min} . Wartości λ_{min} zmieniają się w zależności od zastosowań, stąd w celu uproszczenia prezentacji w tej części artykułu przyjęto jedynie warunek $\lambda > 0$. W odniesieniu do wag W założono rozkład beta.

7.1. Rozkład jednostajny parametru wagowego

Przyjęcie rozkładu jednostajnego λ na przedziale $(0 - \lambda_M)$ indukuje rozkład *a priori* dla wag W o masie prawdopodobieństwa skoncentrowanej wokół wysokich wartości. Przedstawione na wykresie 3 histogramy parametrów $\lambda_M = 1$, $\lambda_M = 4$, $\lambda_M = 9$ i $\lambda_M = 19$ odpowiadają maksymalnym wagom 0,5; 0,8; 0,9 i 0,95. Wyniki estymacji (tabela 5) zaprezentowano również dla $\lambda_M = 49$ i $\lambda_M = 99$, których wagi są równe 0,98 i 0,99. Wyższe wartości górnego zakresu rozkładu jednostajnego λ powodują skoncentrowanie rozkładu prawdopodobieństwa wag $p(W)$ w obszarach odpowiadających granicznej wartości λ_M . Oznacza to, że przypisujemy mniejsze prawdopodobieństwo *a priori* niższemu udziałom informacji z modelu równowagi ogólnej w specyfikacji hybrydowej. Należy zauważyć, że jeśli pomimo przyjęcia wysokich wartości λ_M otrzymujemy niską ocenę *a posteriori* parametru λ , to wnioskowanie w modelu zostaje zdominowane przez informacje zawarte w funkcji wiarygodności. Wydaje się więc, że z praktycznego punktu widzenia optymalne wartości górnego zakresu λ_M powinny wynosić kilkanaście, co z jednej strony zapewnia dopuszczenie wysokich wartości wag *a priori* W , z drugiej zaś nie implikuje prawie zerowych prawdopodobieństw niskich udziałów modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym. Bardzo wysokie wartości λ_M mogą również zmniejszyć stabilność numeryczną modelu.

7.2. Rozkład gamma parametru wagowego

Dla parametru wagowego λ można założyć rozkład gamma o funkcji gęstości: $f_G(\lambda|g_1, g_2)$, z parametrami $g_1 > 0$ i $g_2 > 0$, w którym wartość oczekiwana jest równa $E(\lambda) = g_1 g_2$, a odchylenie standardowe $D(\lambda) = g_1^{1/2} g_2$ (Poirer 1995). W przypadku parametrów g_1 i g_2 przyjęto arbitralnie następujące wartości:

I: $f_G(\lambda|0,5; 1)$, dla którego funkcja gęstości wykazuje prawostronną asymetrię i dopuszcza niezerowe wartości prawdopodobieństwa, nawet w przypadku dużych wartości λ .

II: $f_G(\lambda|1,5; 1)$, dla którego uzyskano rozkład *a priori* wag W . Wartości powyżej 0,5 są najbardziej prawdopodobne, a najmniejsze prawdopodobieństwo *a priori* przypisuje się wagom skrajnym: bliskim zera i jedności.

III: $f_G(\lambda|5; 1)$, reprezentujący rozkłady ze względnie dużymi wartościami parametru g_1 , które powodują, że rozkład gamma zaczyna przypominać rozkład normalny. Sprawia on, że masa prawdopodobieństwa wag W koncentruje się w przedziale od około 0,5 do nieco poniżej 1.

IV: $f_G(\lambda|5; 4)$, który jest rozkładem znacznie rozproszonym, powodującym skoncentrowanie się masy prawdopodobieństwa wysokich wag W .

Zaproponowane wartości parametrów rozkładu λ określają przypadki, które odpowiadają preferowaniu *a priori* niskich (przypadek I), średnich (przypadek II) i wysokich (przypadek III i IV) wartości wag W modelu strukturalnego w specyfikacji hybrydowej. Funkcje gęstości rozkładów gamma parametru λ oraz odpowiadające im histogramy rozkładów *a priori* wag W ilustruje wykres 4.

7.3. Rozkład normalny parametru wagowego

Możliwe jest również przyjęcie rozkładu normalnego *a priori*, uciętego w celu zapewnienia dodatniości parametru wagowego (i spełnienia $\lambda > \lambda_{min}$). Waga W w takim przypadku jest zdefiniowana przez iloraz uciętych rozkładów normalnych, tworzący gęstość o nieznanych własnościach. Wykres 5 przedstawia funkcje gęstości rozkładu normalnego $f_N(\lambda|n_1, n_2)$, o wartości oczekiwanej n_1 i odchyleniu standardowym n_2 , dodatnich wartości parametru wagowego oraz odpowiadające im histogramy rozkładu *a priori* dla W , otrzymane po losowaniu z uciętych rozkładów normalnych.

7.4. Rozkład beta wag W

Alternatywna specyfikacja rozkładu *a priori* parametru wagowego λ może opierać się na wstępnym określeniu rozkładu *a priori* wag W i następnie symulacyjnym sprawdzeniu, jaki rozkład *a priori* jest implikowany dla λ . Wagi W zawierają się w przedziale (0; 1). Powoduje to, że możemy dla nich przyjąć rozkład jednostajny bądź rozkład beta $f_B(W|b_1, b_2)$, którego parametry na potrzeby niniejszej analizy ustalono tak, aby odzwierciedlały jego typowe kształty, w szczególności:

- I: $f_B(W|1, 1)$, który odpowiada rozkładowi jednostajnemu,
- II: $f_B(W|2, 2)$ traktowany jako szczególny ($b_1 = b_2$) przypadek rozkładu symetrycznego wokół $W = 0,5$, który czyni bardziej prawdopodobnymi wagi bliskie 0,5,
- III: $f_B(W|0,5; 3)$, preferujący *a priori* niskie wagi modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, oznaczający jego prawostronną skośność,
- IV: $f_B(W|3; 0,5)$, będący rozkładem o lewostronnej skośności, preferujący *a priori* wysokie wagi modelu strukturalnego w modelu hybrydowym.

Funkcje gęstości *a priori* rozkładów beta W oraz histogramy parametru wagowego λ przedstawia wykres 6. Otrzymane histogramy są skoncentrowane wokół niskich wartości λ , jednak dopuszczają również niezerowe prawdopodobieństwo, że osiągnie ona bardzo wysoki poziom, co jest szczególnie widoczne w przypadku IV (wysokie prawdopodobieństwo w ostatniej belce histogramu, sumującej wartości większe od 200). Wydaje się, że kształt otrzymanych histogramów (por. wykres 4) dla niskich wartości λ najlepiej będą przybliżać rozkłady z rodziny gamma, o niskiej liczbie stopni swobody, równej $2g_1$ (Poirier 1995).

8. Wyniki *a posteriori* różnych typów rozkładu *a priori*

Estymację hybrydowego modelu wektorowej autoregresji przeprowadzono dla przyjętych rozkładów *a priori* λ . Otrzymane oceny wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych *a posteriori* λ i W , w modelu hybrydowym dla $p = 2$, zawiera tabela 5. Rozkład gamma $f_G(\lambda|g_1, g_2)$ w kodzie Dynare jest parametryzowany przez wartość oczekiwaną $E(\lambda) = g_1/g_2$ i odchylenie standardowe $D(\lambda) = g_1^{1/2}/g_2$ (Adjemian i in. 2011), stąd wartości g_1 i g_2 zostały odpowiednio przeliczone. Program zapewnia też spełnienie restrykcji $\lambda > \lambda_{min}$. Przypadek, w którym założono $f_G(\lambda|0,05; 1)$, oznaczający *a priori* $E(\lambda) = 0,05$ i $D(\lambda) = 0,22$, nie został oszacowany ze względu na lokalizację masy prawdopodobieństwa rozkładu *a priori* λ w obszarach poniżej dolnej granicy λ_{min} . Obliczenia rozszerzono

o przypadek $f_G(\lambda|1,4; 0,3)$, dla którego odnotowano najwyższą wartość brzegowej gęstości obserwacji. Aproksymacje brzegowych rozkładów *a posteriori* wag W , obliczonych na podstawie własnych procedur wykorzystujących wyniki symulacji Monte Carlo z programu Dynare, przedstawia wykres 7.

Otrzymane rozkłady są zgodne pod względem położenia i rozproszenia niezależnie od przyjętego rozkładu *a priori* parametru wagowego λ . Oznacza to, że wnioskowanie *a posteriori* jest bardzo precyzyjne i odporne na zmianę parametrów rozkładu *a priori* dla λ , a informacje zawarte w danych dzięki funkcji wiarygodności dominują nad informacją wstępną. Ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji zależy od typu rozkładu *a priori* λ . W szczególności jej najwyższą wartość, równą 1221,5, odnotowano w przypadku rozkładu gamma: $f_G(\lambda|1,4; 0,3)$. W grupie rozkładów normalnych λ najniższy poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równy 1206, odnotowano po założeniu *a priori*: $f_N(\lambda|5; 5)$. Prowadzi to do uzyskania wartości czynnika Bayesa rzędu $3,07 \times 10^{-6}$ (tabela 5). Podobnie jak w przypadku niektórych modeli warunkowych, np. dla $\lambda = 0,72$ i $\lambda = 0,79$, taka brzegowa gęstość obserwacji niekoniecznie oznacza, że model z normalnym rozkładem *a priori*, o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym 5, znacznie gorzej opisuje obserwacje niż modele z rozkładem normalnym, w których przyjęto pozostałe omawiane wartości parametrów. Nieregularność kształtowania się logarytmu brzegowej gęstości obserwacji jest również widoczna w przypadku jednostajnego rozkładu *a priori* λ : w modelu dla $\lambda_M = 19$ wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji jest niższa niż w model dla $\lambda_M = 99$. Może to oznaczać, że w przypadku modeli DSGE-VAR występują problemy z estymatorem brzegowej gęstości obserwacji, którym jest zmodyfikowana średnia harmoniczna. Oznacza to również, że podstawowe kryterium porównywania modeli, za pomocą brzegowej gęstości obserwacji, powinno być w tych modelach uzupełnione o porównania ich innych cech, takich jak brzegowe rozkłady *a posteriori* parametrów. Niezależnie od tego, czy rozpatrujemy modele warunkowe względem parametru wagowego, czy estymujemy λ , oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji wykazuje nieregularności, powodujące, że nie należy tej miary traktować jako jedynej, decydującej o jakości modelu.

9. Specyfikacja rozkładów *a priori* oparta na ich charakterystykach

Specyfikacji parametrów rozkładu *a priori* parametru wagowego λ można również dokonać przez ustalenie położenia i rozproszenia różnych typów rozkładów. Analizowane dotąd rozkłady gamma i rozkład ucięty normalny, których dziedzina jest równa dodatniej półosi, są określone przez dwa parametry, natomiast rozkład jednostajny jest określony na ustalonym przedziale (0, 1). W takiej sytuacji można tak dobrać parametry tych rozkładów, aby uzgodnić tendencję centralną, w postaci wartości oczekiwanej *a priori*. Można też przyjąć inne kryteria, takie jak zapewnienie porównywalności mediany czy przyjętej miary rozproszenia. Taka specyfikacja rozkładu *a priori* umożliwia również zachowanie jego porównywalności w przypadku różnych rzędów opóźnień wektorowej autoregresji. Na potrzeby eksperymentu symulacyjnego parametry rozkładów *a priori* dla λ zostały tak dobrane, aby ich wartość średnia *a priori* $E(\lambda)$ wynosiła:

- przypadek A: $E(\lambda) = 1$ ($W = 0,5$),
- przypadek B: $E(\lambda) = 4$ ($W = 0,8$),
- przypadek C: $E(\lambda) = 19$ ($W = 0,95$).

Rozkład jednostajny *a priori* dla λ pozwala bardzo precyzyjnie określić jego zakres, poczynając od dolnej granicy λ_{min} , która zmienia się wraz z rzędem p opóźnienia od 0,13 do 0,3 i odpowiada wagom od 0,11 do 0,23. Górna granica λ_G została tak dobrana, aby zapewnić odpowiednią wartość średnią *a priori*. Specyfikacja taka ma na celu ustalenie średniego poziomu parametru wagowego *a priori*, co powoduje, że pod warunkiem rozkładu jednostajnego przyjęte wartości nie dopuszczają przypadku $\lambda \rightarrow \infty$. Uzyskane dotąd wyniki wskazują, że brzegowa gęstość obserwacji jest wówczas niska i można go pominąć. Tabela 6 prezentuje wartość oczekiwaną *a posteriori* $E(\lambda/Y)$, dolne i górne granice przedziału największej wiarygodności, λ_{HPD}^{Dolne} i $\lambda_{HPD}^{Górne}$ oraz pozostałe wyniki estymacji w przypadku jednostajnego rozkładu *a priori* λ , przy rzędzie opóźnienia wektorowej autoregresji od $p = 1$ do $p = 4$.

Analogiczne obliczenia przeprowadzono po przyjęciu rozkładu gamma λ : $f_G(\lambda|g_1, g_2 = 2)$, z parametrem $g_1 \in \{0,5; 2; 9,5\}$ oraz $g_2 = 2$, (rozkładu χ^2 z $2g_1$ stopniami swobody), co odpowiada wartościom oczekiwanym *a priori* równym 1, 4 i 19. Otrzymane rezultaty przedstawiono w tabeli 7. Najwyższe oceny logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równe 1220,2 i 1219,6, uzyskano dla wektorowej autoregresji rzędu pierwszego, z najmniej rozproszonymi rozkładami *a priori*. W przypadku autoregresji rzędu drugiego najwyższy poziom odnotowano dla rozkładu gamma $f_G(\lambda|2; 2)$, równy 1219. Otrzymane wyniki nieco różnią się od rezultatów estymacji modeli DSGE-VAR z jednostajnym rozkładem *a priori*, pomimo przybliżonego położenia ich tendencji centralnych. Wybór optymalnego rzędu autoregresji zależy od tego, czy założyliśmy rozkład jednostajny ($p = 2$) czy gamma ($p = 1$). Maksymalny poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji jest wyższy w przypadku modelu z rozkładem jednostajnym. Obydwa modele wskazują taką samą minimalną wagę *a posteriori* modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, równą w przybliżeniu 30%. Jej najwyższy poziom zależy od przyjętego rozkładu *a priori* parametru wagowego i jest równy 90% ($p = 3$) w odniesieniu do rozkładu gamma i 50% ($p = 4$) po przyjęciu rozkładu jednostajnego. W przypadku autoregresji rzędu drugiego otrzymane *a posteriori* wagi: 0,37; 0,38 i 0,56 są w przybliżeniu zgodne z wynikami zilustrowanymi na wykresie 7. Zaprezentowane porównanie wskazuje, że wnioskowanie o optymalnym udziale rozkładu *a priori* w hybrydowym modelu wektorowej autoregresji zależy od wybranego rozkładu *a priori* parametru wagowego, jeśli jako główne kryterium wyboru przyjmujemy ocenę brzegowej gęstości obserwacji.

10. Porównanie modeli warunkowych i bezwarunkowych

Ocena optymalnego poziomu udziału rozkładu *a priori*, generowanego na podstawie modelu równowagi ogólnej, w wektorowej autoregresji, uzyskana w modelach warunkowych względem λ , może zostać porównana z przypadkiem, gdy jako wartość λ przyjmuje się wartość oczekiwaną brzegowego rozkładu *a posteriori* λ . Porównanie ocen parametru wagowego uzyskanych w różny sposób pozwala określić, które z nich i w jakich okolicznościach lepiej stosować w badaniach empirycznych. Wartość oczekiwana *a posteriori* $E(\lambda/Y)$ parametru wagowego zależy od rzędu opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji zarówno po przyjęciu jednostajnego rozkładu *a priori* dla λ , jak i rozkładu gamma. Dla opóźnienia rzędu pierwszego w przypadku rozkładu jednostajnego wartości te wahają się od 0,36 do 0,44. Waga modelu strukturalnego w modelu hybrydowym wynosi więc od 26% do 31%. Z kolei po założeniu *a priori* rozkładu gamma otrzymujemy zakres λ od 0,43 (30%)

do 1,42 (59%). W przypadku opóźnienia rzędu drugiego i przyjęcia rozkładu jednostajnego λ , wartości oczekiwane *a posteriori* $E(\lambda/Y)$ wahają się od 0,57 do 0,61, co odpowiada wagom 36–38%, natomiast w rozkładzie gamma otrzymujemy zakres od 0,59 (37%) do 1,27 (56%). Dla $p = 3$ oszacowanie $E(\lambda/Y)$ nie zmienia się w zależności od zakresu jednostajnego rozkładu *a priori* dla λ i oscyluje wokół 0,8 (45%), natomiast rozkład gamma cechuje się znaczną zmiennością: od 0,7 (41%) do 17 (94%). Autoregresja rzędu czwartego przy jednostajnym rozkładzie prowadzi do $E(\lambda/Y)$ w zakresie od 0,79 (44%) do 1,04 (51%), a dla rozkładu gamma od 0,94 (49%) do 1,65 (62%). W przypadku opóźnienia rzędu czwartego rozkład jednostajny λ na przedziale od 0,3 do 1,7 jest bardziej informacyjny niż dla $p = 1$ i powoduje zaniżenie wartości oczekiwanej *a posteriori* parametru wagowego (por. tabela 6). Ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji zmniejsza się, w miarę jak rozkład *a priori* λ staje się coraz bardziej rozproszony. Wartości średnie *a priori* parametru wagowego są różne od ich wartości oczekiwanych *a posteriori*. Oznacza to, że obserwacje wnoszą dodatkowe informacje na temat optymalnej wagi rozkładu *a priori* w modelu hybrydowym. Proces ten jest najbardziej widoczny w przypadku przyjęcia rozproszonego rozkładu *a priori* λ , w którym jego średnia indukuje wagę modelu strukturalnego w modelu hybrydowym równą 95%.

Najwyższa wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji *a posteriori* $\hat{p}(Y) = 1$ została odnotowana w modelu dla $p = 2$, z rozkładem *a priori* λ na przedziale 0,18–1,82. Odpowiada on wagom modelu strukturalnego z zakresu: 15–65%, jego wartość średnia *a priori* jest równa $E(\lambda = 1)$, a zatem waga modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym wynosi $W = 50\%$. Wartość oczekiwana brzegowego rozkładu *a posteriori* parametru wagowego jest wtedy równa $E(\lambda/Y) = 0,608$ z przedziałem wiarygodności *a posteriori* w granicach: $\lambda_{HPD}^{Dolne} = 0,34$ i $\lambda_{HPD}^{Gorne} = 0,85$. Oznacza to, że oszacowanie punktowe *a posteriori* wagi modelu strukturalnego w modelu połączonym jest równe 38%, a jego zmienność kształtuje się w granicach około 26–46%. W modelach szacowanych względem ustalonych parametrów wagowych najwyższy poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równy 1223,1, został uzyskany dla $\lambda = 0,79$ (waga 44%). Modele te wskazują zatem na nieco inne optymalne wartości parametru wagowego, przy czym $\lambda = 0,79$ należy do przedziału największej gęstości *a posteriori*. Ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w modelu warunkowym uzyskana dla $\lambda = 0,61$ jest nieco niższa (1218,4). W modelu dla $p = 2$ z rozkładem *a priori* gamma λ najwyższa wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji wynosi 1219 i jest niższa niż w przypadku rozkładu jednostajnego na przedziale 0,18–1,82.

Oszacowanie hybrydowej wektorowej autoregresji rzędu czwartego dla trzech rozkładów *a priori* określonych przed górną granicę parametru wagowego: $\lambda_G = 1,7$; $\lambda_G = 7,7$ oraz $\lambda_G = 37,7$, prowadzi do uzyskania brzegowych rozkładów *a posteriori* parametru wagowego λ (por. wykres 8). Otrzymane aproksymacje brzegowych rozkładów *a posteriori* dla $\lambda_G = 7,7$ i $\lambda_G = 37,7$ są w przybliżeniu jednakowe, natomiast brzegowy rozkład *a posteriori* dla przypadku $\lambda_G = 1,7$ jest nieco bardziej skupiony, ze względu na silniejszą informacyjność rozkładu *a priori* w przypadku $p = 4$. Linie pionowe oznaczają wartości modalnych parametru wagowego, obliczone na podstawie wielowymiarowego rozkładu *a posteriori*. Modalne wyznaczone z rozkładu łącznego mogą nie pokrywać się z modalnymi rozkładów brzegowych w sytuacji, kiedy rozkład *a posteriori* nie jest bliski wielowymiarowemu rozkładowi normalnemu. Może to być również konsekwencją tego, że lokalne maksimum łącznego rozkładu *a posteriori*, wyznaczone za pomocą metod optymalizacyjnych, znajduje się w obszarach niedostępnych dla łańcucha Markowa; obszerniejszy komentarz można znaleźć w pracy: Adjemian, DarracqPariès, Moyen (2008).

W modelu hybrydowym przy $p = 4$ wartości oczekiwane *a posteriori* parametru wagowego są równe odpowiednio: $E(\lambda/Y) = 0,986$ i $E(\lambda/Y) = 1,035$ w zależności od zakresu jednostajnego rozkładu *a priori*, przy czym jego zwiększenie prowadzi do zmniejszenia precyzji oszacowania λ . Logarytmy brzegowych gęstości obserwacji w obydwu przypadkach są równe około 1216, czyli specyfikacje te są jednakowo prawdopodobne *a posteriori*, przy założeniu, że ich prawdopodobieństwa *a priori* są jednakowe. W tym przypadku wnioski z estymacji pozostają zgodne z wynikami szacowania λ w modelach warunkowych, gdzie najwyższą brzegową gęstość obserwacji odnotowano dla $\lambda = 0,92$ i $\lambda = 1$, równą 1220,4. W przypadku rozkładu gamma dla λ najwyższa ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji wynosi 1216,8 i jest zbliżona do wartości uzyskanej w przypadku rozkładu jednostajnego.

Analogiczne porównanie wyników szacowania i wyznaczania optymalnego udziału informacji pochodzących z modelu strukturalnego w modelu połączonym rzędu trzeciego prowadzi do wniosku, że w tym przypadku wyniki modeli warunkowych i po estymacji λ są nieco mniej zgodne. Wartości oczekiwane *a posteriori* parametru wagowego, w przypadku założenia dla niego *a priori* rozkładu jednostajnego, są równe około 0,8, czyli waga *a posteriori* modelu strukturalnego wynosi około 44%. Ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, najwyższa dla specyfikacji A i malejąca w miarę zwiększania się zakresu rozkładu jednostajnego dla λ , waha się w granicach 1221,6–1213,2. W przypadku rozkładu gamma jej najwyższa ocena wynosi 1217,5. Oznacza to, że w tym przypadku model hybrydowy z rozkładem *a priori* gamma λ znacznie gorzej opisuje obserwacje niż modele z rozkładem jednostajnym w przyjętych zakresach. W modelach warunkowych najwyższy poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji (równy 1221,6) odnotowano dla $\lambda = 1,08$, co odpowiada wadze rozkładu *a priori* wynoszącej 52%. Niewiele niższe wartości zanotowano również dla $\lambda = \{0,56; 0,72; 0,79; 0,85; 1,27\}$.

W wyniku estymacji parametru wagowego dla $p = 1$, przy założeniu jednostajnego rozkładu *a priori* dla λ , otrzymujemy wartości oczekiwane *a posteriori* $E(\lambda/Y)$ równe około 0,35–0,44 (26–31%). Oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, wynoszące wtedy 1219,4, jest najwyższe w przypadku najbardziej skupionego rozkładu *a priori* λ . W rozkładzie gamma wartości oczekiwane *a posteriori* $E(\lambda/Y)$ wahają się w granicach 0,43–1,42 (30–59%), natomiast najwyższa ocena logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, równa 1220,2, została odnotowana dla rozkładu, w którym $E(\lambda) = 1$. Jest to wartość wyższa niż w przypadku założonych rozkładów jednostajnych. Optymalna wartość parametru wagowego w modelach warunkowych jest równa 0,43 (30%), a logarytm brzegowej gęstości obserwacji wynosi dla niej 1219,9. Podobny jest poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji dla $\lambda = 0,32$ (24%) i nieco niższy dla $\lambda = 0,47$ (32%). Oznacza to, że czynniki Bayesa wskazują na równoważność modeli z estymowanym parametrem λ , przy założeniu rozkładu jednostajnego [0,13;1,87] i rozkładu gamma $f_G(\lambda|0,5; 2)$, oraz modeli warunkowych dla $\lambda = 0,43$ ze względu na sposoby opisu danych dla $p = 1$.

Z przeprowadzonych badań empirycznych wynika, że optymalna wartość parametru wagowego zwiększa się w miarę wzrostu opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji. Zakres jednostajnego rozkładu *a priori* λ , który nie jest silnie informacyjny w przypadku autoregresji rzędu pierwszego, może okazać się bardziej informacyjny w modelu z opóźnieniem rzędu czwartego i prowadzić do zaniżenia ocen *a posteriori* parametru wagowego. Optymalna wartość parametru wagowego w modelach szacowanych warunkowo względem λ zawiera się w przedziale największej wiarygodności *a posteriori* λ , dla wszystkich opóźnień wektorowej autoregresji. W przypadku

estymacji parametru wagowego otrzymujemy brzegowy rozkład *a posteriori*, którego wartość oczekiwaną traktujemy jako ocenę punktową λ , a wybrane miary rozproszenia jako ocenę niepewności. W przypadku estymacji modeli warunkowych zakładamy arbitralnie wartości λ , których zakres może wpływać na końcowe wnioskowanie, oraz obserwujemy znaczną wrażliwość ocen brzegowej gęstości obserwacji na niewielkie zmiany wartości parametru wagowego. Estymacja szeregu modeli warunkowych względem λ jest trudniejsza i niekoniecznie prowadzi do uzyskania stabilniejszych ocen brzegowej gęstości obserwacji. Można ją jednak stosować do obliczenia poziomów brzegowych gęstości obserwacji dla wartości granicznych $\lambda \rightarrow \infty$ i analizy własności modelu DSGE-VAR. Z praktycznego punktu widzenia estymacja parametru λ dostarcza pełnej wiedzy *a posteriori* w postaci rozkładu brzegowego parametru wagowego oraz bezpośrednio interpretowalnych wag W modelu strukturalnego w modelu hybrydowym. Należy jednak zwrócić uwagę na konieczność poprawnej specyfikacji rozkładu *a priori* dla λ , który powinien być dostatecznie rozproszony, aby można było zweryfikować wstępne założenia za pomocą danych empirycznych. Z drugiej strony jego nadmierne rozproszenie może spowodować, że oceny brzegowej gęstości obserwacji będą niższe.

11. Podsumowanie

Analizę sposobów wnioskowania o parametrze wagowym w hybrydowym modelu wektorowej autoregresji można przeprowadzić na dwa sposoby: przez estymację modeli warunkowych oraz przez formalne wnioskowanie o optymalnym udziale informacji pochodzących z modelu równowagi ogólnej w modelu połączonym. Estymacja parametru wagowego wymaga założenia rozkładu *a priori*, który może zostać powiązany z implikowanym rozkładem *a priori* wag modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, co można zilustrować za pomocą prostej symulacji. Oceny *a posteriori* logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w modelach hybrydowych znacznie zmieniają się pod wpływem niewielkich zmian wartości parametru wagowego, co utrudnia jego optymalny wybór. Estymacja parametru wagowego dostarcza pełnej informacji *a posteriori* o kształcie jego gęstości brzegowej. Jej wartość oczekiwaną przyjmujemy w miejsce oceny punktowej optymalnego udziału informacji *a priori* w modelu połączonym, a miarą niepewności związanej z wnioskowaniem może być przedział największej wiarygodności *a posteriori* bądź odchylenie standardowe. Podejście to umożliwia aproksymację rozkładu *a posteriori* wag modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, wraz z oceną jego rozproszenia. Z analizy empirycznej wynika, że w rozpatrywanych modelach, niezależnie do typu rozkładu *a priori* parametru wagowego, brzegowe rozkłady *a posteriori* wag są podobne, co wskazuje na dużą precyzję wnioskowania i odporność wyników *a posteriori* na zmianę założeń *a priori*. Przeprowadzone obliczenia wskazują, że ocena jakości modelu za pomocą brzegowej gęstości obserwacji powinna zostać uzupełniona innymi kryteriami, opartymi na wnioskowaniu *a posteriori* o parametrach strukturalnych bądź ich funkcjach.

Bibliografia

- Adjemian A., DarracqPariès M., Moyen S. (2008), *Towards a monetary policy evaluation framework*, European Central Bank Working Paper, 942, Frankfurt am Main.
- Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Mihoubi F., Perendia G., Ratto M., Villemot S. (2011), *Dynare: reference manual, version 4*, Dynare Working Papers, 1, Paris.
- An S., Schorfheide F. (2007), Bayesian analysis of DSGE models - rejoinder, *Econometric Reviews*, 26(2–4), 211–219.
- Calvo G. (1983), Staggered prices in a utility-maximizing framework, *Journal of Monetary Economics*, 12(3), 383–398.
- Chari V.V., Kehoe P.J., McGrattan E.R. (2008), Are structural VARs with long-run restrictions useful in developing business cycle theory, *Journal of Monetary Economics*, 55(8), 1337–1352.
- Christiano L.J. (2007), Comment, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25(2), 143–151.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C. (2005), Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy, *Journal of Political Economy*, 113(1), 1–45.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Vigfusson R. (2006), Assessing structural VARs, NBER Chapters, *Macroeconomics Annual*, 21(1), 1–106.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2002), *Priors from general equilibrium models for VARs*, Penn Institute for Economic Research, Working Paper, 02-024, Philadelphia.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2004), Priors from general equilibrium models for VARs, *International Economic Review*, 45(2), 643–673.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2006), How good is what you've got? DSGE-VAR as a toolkit for evaluating the DSGE models, *Economic Review*, Q2, 21–37.
- Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R. (2007), On the fit of New-Keynesian models, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25(2), 123–143.
- Erceg C.J., Henderson D.W., Levin A.T. (2000), Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts, *Journal of Monetary Economics*, 46(2), 281–313.
- Favero C. (2007), *Model evaluation in macroeconometrics: from early empirical macroeconomic models to DSGE models*, Working Papers, 327, IGER, Bocconi University.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Sargent T. (2005), *A, B, C's (and D's) for understanding VARs*, Working Paper, 2005-9, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Sargent T., Watson M. (2007), ABCs (and Ds) of understanding VARs, *American Economic Review*, 97(3), 1021–1026.
- Geweke J. (1999), Using simulation methods for Bayesian econometric models: inference, development and communication, *Econometric Reviews, Taylor and Francis Journals*, 18(1), 1–73.
- Kass R.E., Raftery A.E. (1995), Bayes factors, *Journal of the American Statistical Association*, 90(430), 773–795.
- Kolasa M., Rubaszek M., Skrzypczyński P. (2012), Putting the New Keynesian DSGE model to the real-time forecasting test, *Journal of Money, Credit and Banking*, 44(7), 1301–1324.
- Poirier D.J. (1995), *Intermediate statistics and econometrics: a comparative approach*, MIT Press, Hongkong.

- Rabanal P., Rubio-Ramírez J.F. (2005), Comparing New Keynesian models of the business cycle: a Bayesian approach, *Journal of Monetary Economics*, 52(6), 1151–1166.
- Ravenna F. (2006), *Vector autoregressions and reduced form representations of DSGE models*, Documentos de Trabajo, 0619, Banco de España.
- Schorfheide F. (2000), Loss function based evaluation of DSGE models, *Journal of Applied Econometrics*, 15(6), 645–670.
- Warne A., Coenen G., Christoffel K. (2012), *Forecasting with DSGE-VAR models*, Directorate General Research, European Central Bank, mimeo.
- Wróbel-Rotter R. (2007a), Dynamic Stochastic General Equilibrium models: structure and estimation, w: W. Welfe, P. Wdowiński (red.), *Modelling economies in transition*, Wydawnictwo „Green”, Łódź.
- Wróbel-Rotter R. (2007b), Dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 48, 69–93.
- Wróbel-Rotter R. (2007c), Dynamiczny stochastyczny model równowagi ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej, *Przegląd Statystyczny*, 54(3), 25–48.
- Wróbel-Rotter R. (2008), Bayesian estimation of a Dynamic General Equilibrium model, w: A. Welfe (red.), *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych. Ósme warsztaty doktorskie z zakresu ekonometrii i statystyki*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Oficyna Wydawnicza.
- Wróbel-Rotter R. (2011a), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 869, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. (2011b), *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody analizy danych, 873, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. (2011c), *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 872, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. (2012a), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody analizy danych, 878, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. (2012b), *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 879, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. (2012c), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 53, 59–83.
- Wróbel-Rotter R. (2012d), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej: *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 53, 85–112.
- Wróbel-Rotter R. (2013a), *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia (w druku).
- Wróbel-Rotter R. (2013b), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między postacią strukturalną i zredukowaną*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody Analizy Danych (złożone do druku).

Wróbel-Rotter R. (2013c), *Hybrydowy model wektorowej autoregresji – aspekty metodologiczne i praktyczne*, maszynopis niepublikowany.

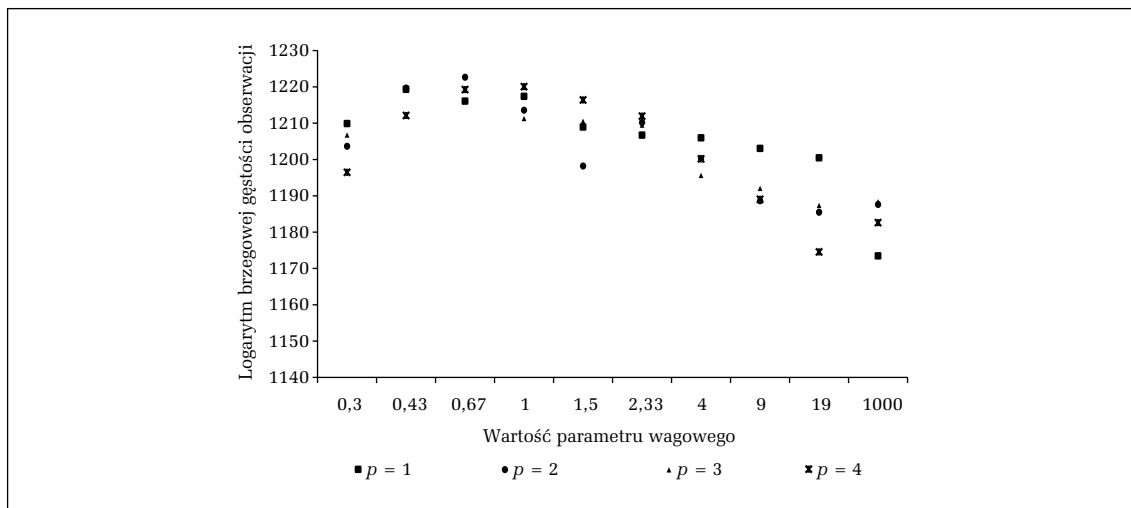
Zellner A. (1971), *An introduction to Bayesian inference in econometrics*, John Wiley and Sons, New York.

Podziękowania

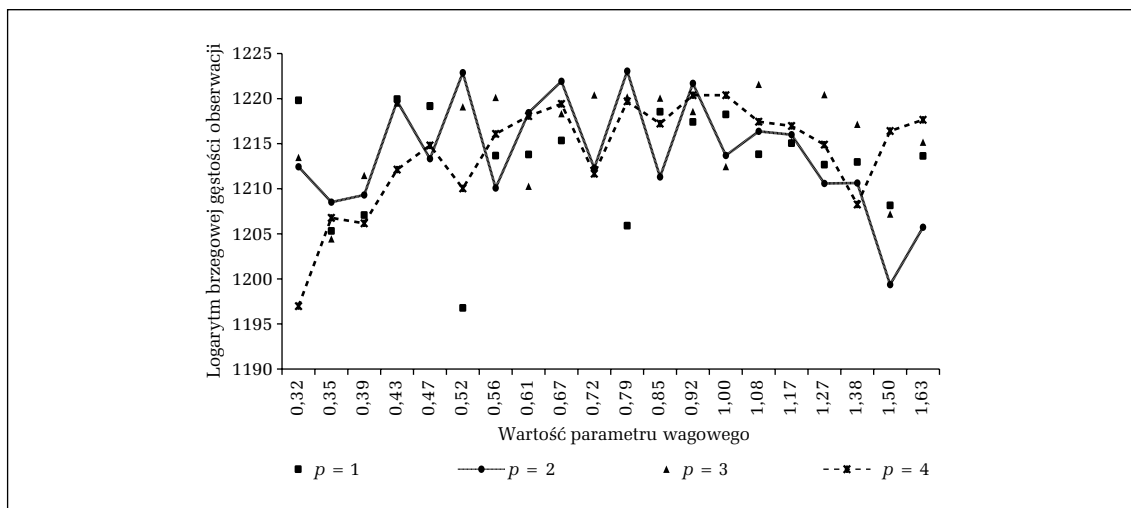
Autorka dziękuje Recenzentowi za zwrócenie uwagi na możliwość przyjęcia dla parametru wagowego innych rozkładów *a priori*.

Aneks

Wykres 1

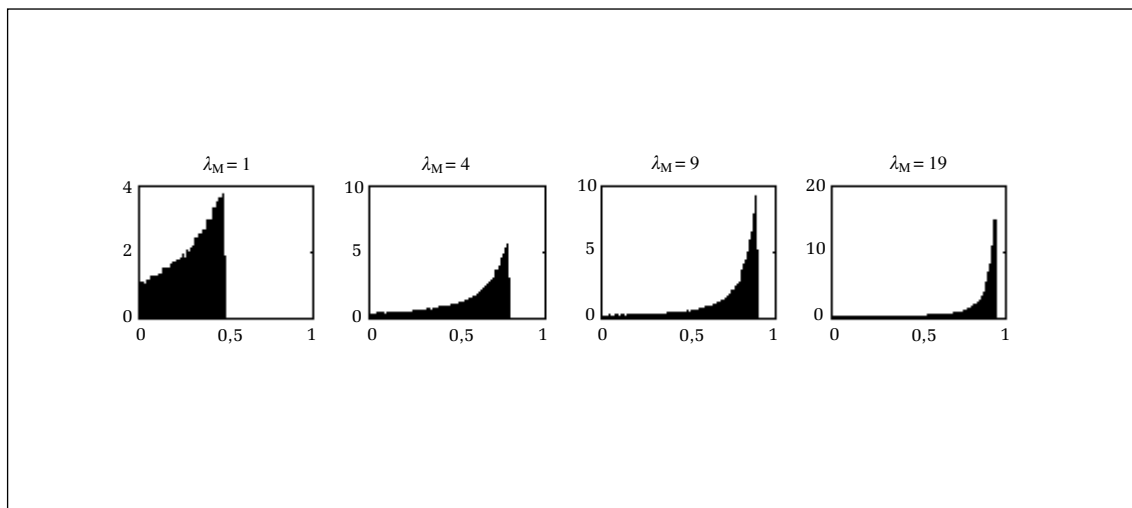
Logarytm brzegowej gęstości obserwacji w zbiorze Λ 

Wykres 2

Logarytmy brzegowej gęstości obserwacji w zbiorze Λ^* 

Wykres 3

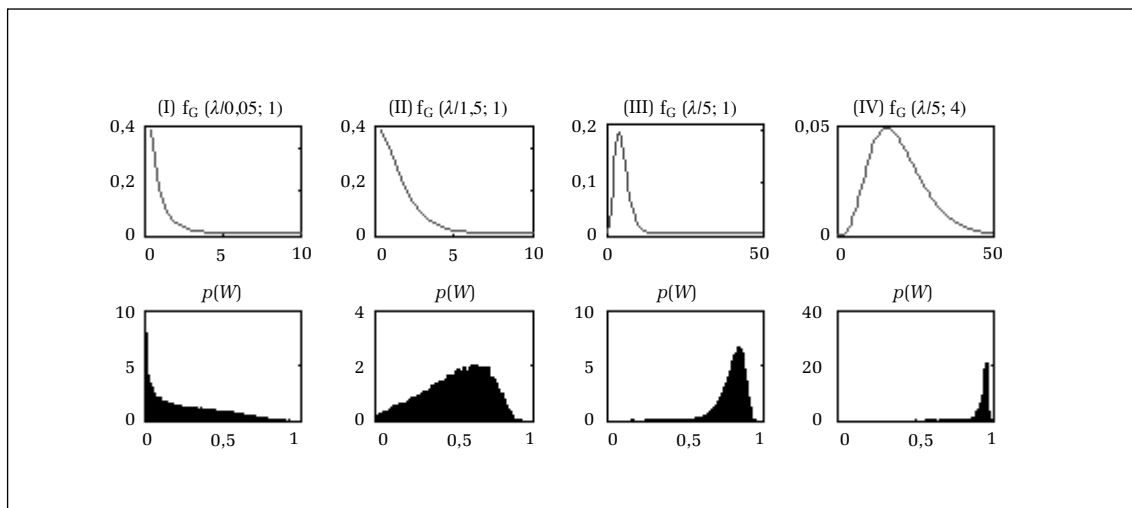
Histogramy rozkładu wag w zależności od zakresu rozkładu jednostajnego dla λ



Uwaga: λ_M oznacza górną granicę rozkładu jednostajnego dla parametru wagowego λ .

Wykres 4

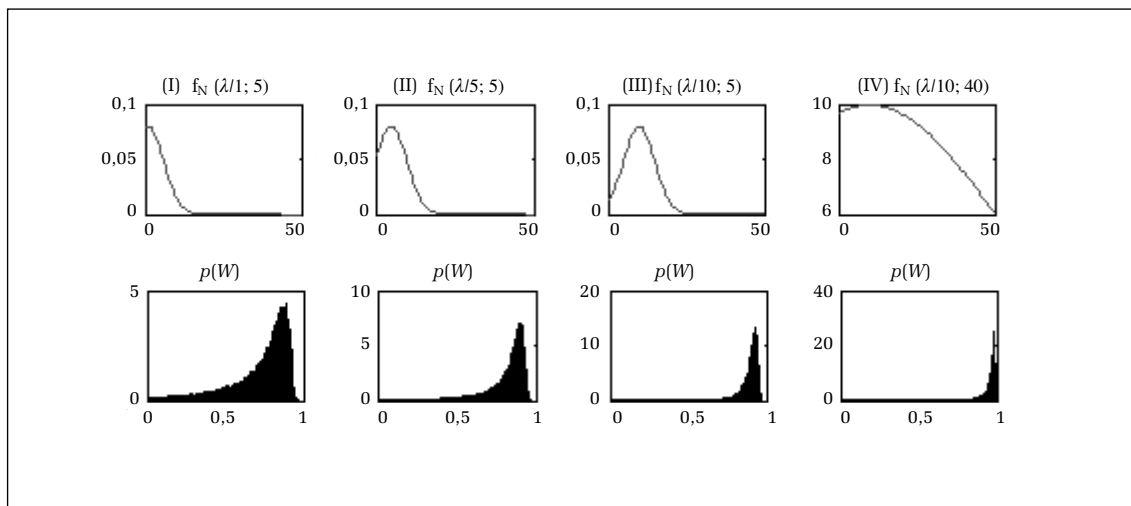
Funkcje gęstości rozkładu gamma dla λ i odpowiadające im histogramy rozkładu wag



Uwaga: $f_G(\lambda/g_1, g_2)$ oznacza funkcję gęstości rozkładu gamma dla λ , z parametrami g_1 i g_2 ; $p(W)$ to histogram gęstości wag W modelu strukturalnego w modelu hybrydowym.

Wykres 5

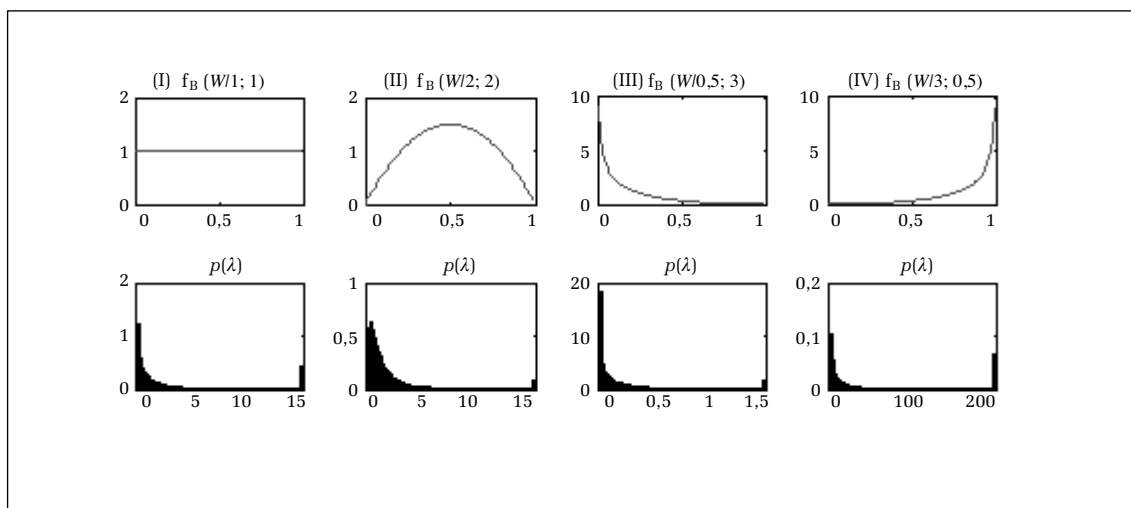
Funkcje gęstości rozkładu normalnego λ i odpowiadające im histogramy rozkładu wag



Uwaga: $f_N(\lambda/n_1, n_2)$ oznacza funkcję gęstości rozkładu normalnego dla λ , o wartości oczekiwanej n_1 i odchyleniu standardowym n_2 ; $p(W)$ to histogram gęstości wag W modelu strukturalnego w modelu hybrydowym.

Wykres 6

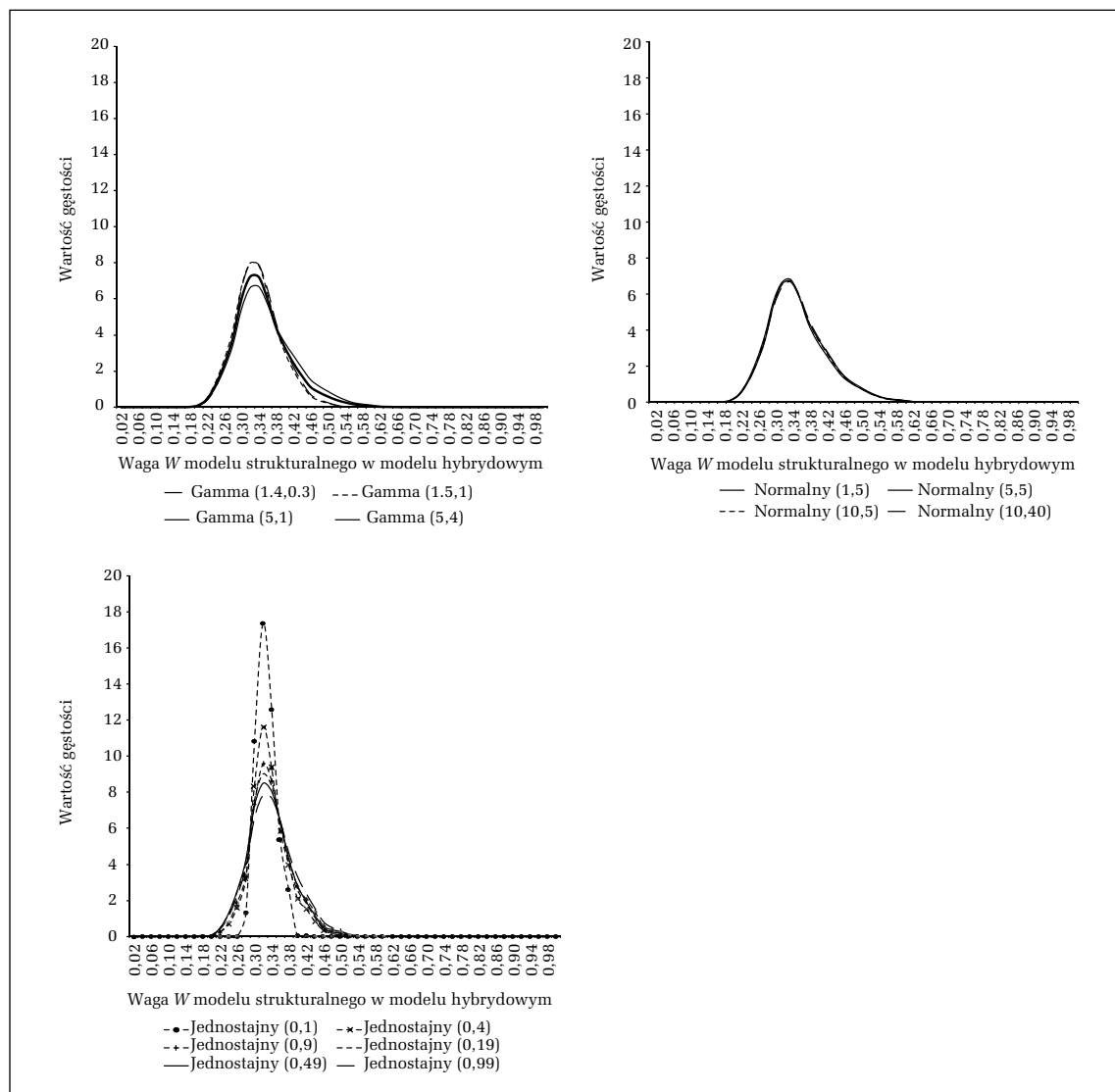
Funkcje gęstości rozkładu beta wag i odpowiadające im histogramy rozkładu λ



Uwaga: $f_B(\lambda/b_1, b_2)$ oznacza funkcję gęstości rozkładu beta z parametrami b_1 i b_2 ; $p(\lambda)$ to histogram rozkładu dla parametru wagowego λ .

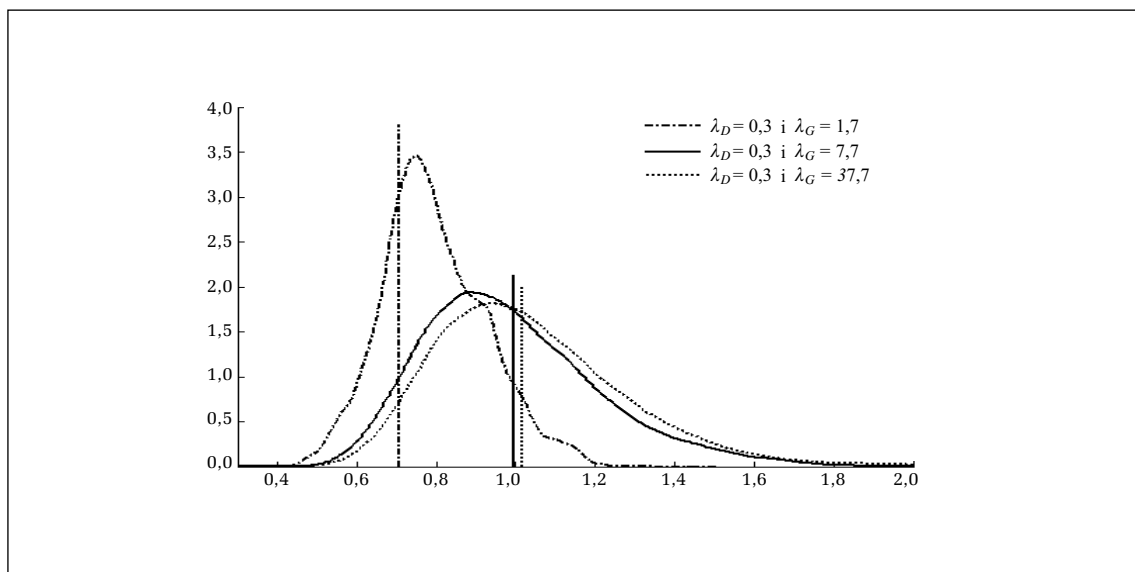
Wykres 7

Brzegowy rozkład *a posteriori* wag modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym w zależności od rozkładu *a priori* parametru wagowego $\lambda(p=2)$



Wykres 8

Aproksymacja brzegowych rozkładów *a posteriori* parametru wagowego dla $p = 4$, przy jednostajnym rozkładzie *a priori*



Uwaga: λ_D i λ_G oznaczają, odpowiednio, dolną i górną granicę jednostajnego rozkładu *a priori* parametru wagowego λ .

Tabela 1

Charakterystyki rozkładu *a posteriori* w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie

Parametry modelu	E(.) <i>a priori</i>	E(.) <i>a posteriori</i>	λ_{HPD}^{Dolne}	$\lambda_{HPD}^{Górne}$	Typ rozkładu	D(.) <i>a priori</i>
σ	0,670	0,3318	0,1615	0,5042	odwrócony gamma	0,9000
γ	1,000	1,4030	0,8094	1,9970	normalny	0,5000
ρ_r	0,500	0,8288	0,7841	0,8751	jednostajny	0,2887
γ_π	1,500	1,1746	0,8341	1,5327	normalny	0,5000
γ_y	0,125	0,3581	0,1853	0,5269	normalny	0,1250
ρ_a	0,500	0,9272	0,8615	0,9863	jednostajny	0,2887
ρ_g	0,500	0,8410	0,7788	0,9042	jednostajny	0,2887
θ_p	2,000	5,4081	2,5287	8,1826	gamma	1,4200
θ_w	2,000	5,4381	3,0533	7,7485	gamma	1,7100
σ_a	0,500	0,0068	0,0034	0,0101	jednostajny	0,2887
σ_g	0,500	0,0270	0,0166	0,0372	jednostajny	0,2887
σ_z	0,500	0,0012	0,0010	0,0014	jednostajny	0,2887
σ_λ	0,500	0,4060	0,0868	0,7425	jednostajny	0,2887

Uwagi:

E(.) – wartość oczekiwana,

D(.) – odchylenie standardowe,

 λ_{HPD}^{Dolne} i $\lambda_{HPD}^{Górne}$ – dolna i górna granica 90-procentowego przedziału największej wiarygodności *a posteriori*.

Tabela 2

Logarytmy brzegowej gęstości obserwacji szacowanej w zbiorze Λ

Rząd opóźnień wektora autoregresji	Wartości λ									
	0,3	0,43	0,67	1,0	1,5	2,33	4,0	9,0	19	1000
	Waga W									
	0,23	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	$\approx 1,0$
$p = 1$	<u>1210</u>	1219	1216	1217	1209	1207	<u>1206</u>	<u>1203</u>	<u>1200</u>	1173
$p = 2$	1204	<u>1220</u>	1223	1214	1198	1210	1200	1189	1185	<u>1187,6</u>
$p = 3$	1207	1219	1219	1211	1211	1209	1196	1192	1187	1188,4
$p = 4$	1196	1212	1219	1220	1216	1212	1200	1189	1175	1183

Uwagi:

 λ – parametr wagowy, W – odpowiadająca danemu λ waga rozkładu *a priori*, p – rząd opóźnienia hybrydowej autoregresji wektorowej;wartości pogrubione oznaczają poziomy najwyższe w ramach danego opóźnienia wektorowej autoregresji, wartości podkreślone – poziomy najwyższe w ramach danego λ , dla różnych opóźnień autoregresji wektorowej.

Tabela 3

Logarytm brzegowej gęstości obserwacji szacowany w zbiorze Λ^*

λ	W	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
0,32	0,24	<u>1219,8</u>	1212,4	1213,5	1197,0
0,35	0,26	1205,3	<u>1208,5</u>	1204,4	1206,8
0,39	0,28	1207,1	1209,3	<u>1211,5</u>	1206,2
0,43	0,30	1219,9	1219,7	1219,5	1212,1
0,47	0,32	<u>1219,2</u>	1213,3	1219,1	1214,8
0,52	0,34	1196,8	<u>1222,9</u>	1219,1	1210,0
0,56	0,36	1213,7	1210,1	<u>1220,1</u>	1216,1
0,61	0,38	1213,8	<u>1218,4</u>	1210,3	1218,1
0,67	0,40	1215,4	<u>1221,9</u>	1218,3	1219,4
0,72	0,42	1051,9	1212,3	<u>1220,4</u>	1211,7
0,79	0,44	1205,9	1223,1	1220,2	1219,7
0,85	0,46	1218,5	1211,3	<u>1220,1</u>	1217,2
0,92	0,48	1217,4	<u>1221,7</u>	1218,6	1220,4
1,00	0,50	1218,2	1213,7	1212,5	1220,4
1,08	0,52	1213,8	1216,4	1221,6	1217,4
1,17	0,54	1215,1	1216,0	1215,3	<u>1217,0</u>
1,27	0,56	1212,7	1210,6	<u>1220,4</u>	1214,9
1,38	0,58	1213,0	1210,6	<u>1217,1</u>	1208,3
1,50	0,60	1208,1	1199,4	1207,2	<u>1216,4</u>
1,63	0,62	1213,6	1205,7	1215,2	<u>1217,7</u>

Uwagi:

 λ – parametr wagowy, W – odpowiadająca danemu λ waga rozkładu *a priori*, p – rząd opóźnienia hybrydowej autoregresji wektorowej;wartości pogrubione oznaczają poziomy najwyższe w ramach danego opóźnienia wektorowej autoregresji, wartości podkreślone – poziomy najwyższe w ramach danego λ , dla różnych opóźnień autoregresji wektorowej.

Tabela 4

Czynniki Bayesa dla wybranych modeli warunkowych

λ	W	$B(\lambda_p, \lambda = 0,43)$	$B(\lambda_p, \lambda = 0,79)$	$B(\lambda_p, \lambda = 1,08)$	$B(\lambda_p, \lambda = 1)$
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
0,32	0,24	0,87	$2,4 \times 10^{-5}$	$3,0 \times 10^{-4}$	$6,9 \times 10^{-11}$
0,35	0,26	$4,5 \times 10^{-7}$	$4,8 \times 10^{-7}$	$3,5 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-6}$
0,39	0,28	$2,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-6}$	$4,1 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^{-7}$
0,43	0,30	1,00	0,04	0,12	$2,6 \times 10^{-4}$
0,47	0,32	0,47	$6,0 \times 10^{-5}$	0,09	$3,8 \times 10^{-3}$
0,52	0,34	$8,7 \times 10^{-11}$	0,84	0,08	$3,2 \times 10^{-5}$
0,56	0,36	$1,9 \times 10^{-3}$	$2,3 \times 10^{-6}$	0,23	0,01
0,61	0,38	$2,2 \times 10^{-3}$	0,01	$1,2 \times 10^{-5}$	0,10
0,67	0,40	0,01	0,32	0,04	0,38
0,72	0,42	$1,1 \times 10^{-73}$	$2,1 \times 10^{-5}$	0,31	$1,6 \times 10^{-4}$
0,79	0,44	$8,0 \times 10^{-7}$	1,00	0,24	0,51
0,85	0,46	0,25	$7,9 \times 10^{-6}$	0,22	0,04
0,92	0,48	0,08	0,26	0,05	1,00
1,00	0,50	0,18	$8,5 \times 10^{-05}$	$1,1 \times 10^{-4}$	1,00
1,08	0,52	$2,2 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$	1,00	0,05
1,17	0,54	0,01	$8,7 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-3}$	0,03
1,27	0,56	$7,0 \times 10^{-4}$	$3,9 \times 10^{-6}$	0,32	$4,1 \times 10^{-3}$
1,38	0,58	$9,3 \times 10^{-4}$	$4,1 \times 10^{-6}$	0,01	$5,4 \times 10^{-6}$
1,50	0,60	$7,5 \times 10^{-6}$	$5,1 \times 10^{-11}$	$5,6 \times 10^{-7}$	0,02
1,63	0,62	$1,8 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-8}$	$1,6 \times 10^{-3}$	0,07

Uwagi:

 λ – parametr wagowy, W – odpowiadająca danej λ waga rozkładu *a priori*, p – rząd opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji, $B(\lambda_p, \lambda = 0,43) = \exp(\ln p(Y|\lambda_p) - \ln p(Y|\lambda = 0,43))$ – iloraz brzegowych gęstości obserwacji względem modelu o jej najwyższej wartości dla $p = 1$, $B(\lambda_p, \lambda = 0,79)$ – definiuje czynniki Bayesa w modelach hybrydowych dla $p = 2$, $B(\lambda_p, \lambda = 1,08) = \exp(\ln p(Y|\lambda_p) - \ln p(Y|\lambda = 1,08))$, dla $p = 3$, $B(\lambda_p, \lambda = 1) = \exp(\ln p(Y|\lambda_p) - \ln p(Y|\lambda = 1))$ dla $p = 4$.

Tabela 5

Logarytmy brzegowej gęstości obserwacji w zależności od typu rozkładu *a priori* λ

Rozkład <i>a priori</i> λ	$E(\lambda Y)$	$D(\lambda Y)$	$E(W Y)$	$D(W Y)$	$\ln \hat{p}(Y)$
$U(0; 1)$	0,502	0,058	0,333	0,025	1203,1
$U(0; 4)$	0,513	0,100	0,336	0,042	1217,3
$U(0; 9)$	0,526	0,119	0,341	0,048	1217,1
$U(0; 19)$	0,513	0,117	0,335	0,049	1205,4
$U(0; 49)$	0,515	0,119	0,336	0,050	1211,8
$U(0; 99)$	0,533	0,136	0,343	0,054	1208,5
$f_G(\lambda 1,4; 0,3)$	0,529	0,132	0,342	0,053	1221,5
$f_G(\lambda 1,5; 1)$	0,520	0,131	0,338	0,053	1217,6
$f_G(\lambda 5; 1)$	0,552	0,172	0,349	0,063	1216,5
$f_G(\lambda 5; 4)$	0,577	0,194	0,358	0,069	1210,4
$f_N(\lambda 1; 5)$	0,577	0,191	0,358	0,068	1218,9
$f_N(\lambda 5; 5)$	0,568	0,188	0,354	0,068	1206,3
$f_N(\lambda 10; 5)$	0,571	0,186	0,356	0,067	1218,9
$f_N(\lambda 10; 40)$	0,575	0,185	0,357	0,067	1218,8

Uwagi:

 $U(0; \lambda_M)$ – rozkład jednostajny na przedziale od 0 do λ_M , $f_G(\lambda|g_1, g_2)$ – rozkład gamma z parametrami g_1 i g_2 , $f_N(\lambda|n_1, n_2)$ – rozkład normalny o wartości oczekiwanej n_1 i odchyleniu standardowym n_2 , $E(\lambda|Y)$ i $D(\lambda|Y)$ – wartość oczekiwana i odchylenie standardowe *a posteriori* parametru wagowego, $E(W|Y)$ i $D(W|Y)$ – wartość oczekiwana i odchylenie standardowe *a posteriori* wagi modelu strukturalnego w modelu hybrydowym, $\ln \hat{p}(Y)$ – logarytm brzegowej gęstości obserwacji *a posteriori*.

Tabela 6

Estymacja parametru wagowego dla różnych opóźnień wektorowej autoregresji przy jednostajnym rozkładzie *a priori*

	λ_{min}	λ_G	$E(\lambda)$	$E(\lambda Y)$	λ_{HPD}^{Dolne}	$\lambda_{HPD}^{Górne}$	$\ln \hat{p}(Y)$	W_D	W_G	W_A	W_P
	(w %)										
$p = 1$	0,13	1,87	1	0,443	0,210	0,658	1219,4	11	65	50	31
	0,13	7,87	4	0,377	0,176	0,569	1211,1	11	89	80	27
	0,13	37,87	19	0,357	0,177	0,519	1207,4	11	97	95	26
$p = 2$	0,18	1,82	1	0,608	0,344	0,853	1224,2	15	65	50	38
	0,18	7,82	4	0,614	0,352	0,874	1221,0	15	89	80	38
	0,18	37,82	19	0,565	0,333	0,794	1217,4	15	97	95	36
$p = 3$	0,24	1,76	1	0,806	0,513	1,108	1221,6	19	64	50	45
	0,24	7,76	4	0,799	0,502	1,083	1216,5	19	89	80	44
	0,24	37,76	19	0,792	0,493	1,082	1213,2	19	97	95	44
$p = 4$	0,30	1,70	1	0,794	0,587	1,017	1208,8	23	63	50	44
	0,30	7,70	4	0,986	0,628	1,330	1216,6	23	89	80	50
	0,30	37,70	19	1,035	0,663	1,403	1216,5	23	97	95	51

Uwagi:

λ_{min} i λ_G – dolna i górna granica rozkładu jednostajnego dla parametru wagowego,

$E(\lambda)$ – wartość średnia rozkładu *a priori* λ ,

$E(\lambda|Y)$ – wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* λ ,

λ_{HPD}^{Dolne} i $\lambda_{HPD}^{Górne}$ – dolna i górna granica 90-procentowego przedziału największej wiarygodności *a posteriori*,

W_D, W_G, W_A i W_P – wagi, odpowiednio, dla: λ_{min} , λ_G , $E(\lambda)$ i $E(\lambda|Y)$,

$\ln \hat{p}(Y)$ – logarytm brzegowej gęstości obserwacji *a posteriori*.

Tabela 7

Estymacja parametru wagowego dla różnych opóźnień wektorowej autoregresji przy założeniu rozkładu gamma dla parametru wagowego

	$E(\lambda)$	$E(\lambda Y)$	λ_{HPD}^{Dolne}	$\lambda_{HPD}^{Górne}$	$\ln \hat{p}(Y)$	W_A	W_P
						(w %)	
$p = 1$	1	0,43	0,20	0,65	1220,2	50	30
	4	0,53	0,23	0,81	1219,6	80	34
	19	1,42	0,80	2,14	1195,8	95	59
$p = 2$	1	0,59	0,33	0,81	1217,2	50	37
	4	0,60	0,35	0,87	1219,0	80	38
	19	1,27	0,80	1,77	1202,2	95	56
$p = 3$	1	0,70	0,45	0,93	1212,6	50	41
	4	0,85	0,53	1,17	1217,5	80	46
	19	17,15	0,80	26,24	1191,3	95	94
$p = 4$	1	0,94	0,61	1,25	1216,8	50	49
	4	1,01	0,63	1,38	1215,2	80	50
	19	1,65	0,97	2,32	1201,7	95	62

Uwagi:

$E(\lambda)$ – wartość oczekiwana rozkładu *a priori* λ ,

$E(\lambda|Y)$ – wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* λ ,

λ_{HPD}^{Dolne} i $\lambda_{HPD}^{Górne}$ – dolna i górna granica 90-procentowego przedziału największej wiarygodności *a posteriori*,

W_A i W_P – wagi rozkładu *a priori* w modelu hybrydowym, odpowiednio, dla wartości oczekiwanej *a priori* i *a posteriori* dla λ ,

$\ln \hat{p}(Y)$ – logarytm brzegowej gęstości obserwacji *a posteriori*;

wartości pogrubione oznaczają poziomy najwyższe w ramach danego opóźnienia wektorowej autoregresji.

An estimated general equilibrium model and vector autoregression – the hybrid model

Abstract

The DSGE-VAR model consists of two vector autoregressions: the first one approximates linearised solution of the stochastic dynamic general equilibrium model and is used as a tool for construction of a prior distribution for the second one, estimated with the observed data. The key role in the hybrid model is played by the weighting parameter, which states how informative the prior is, and has the crucial impact for the assessment of marginal likelihood. It can be estimated or chosen after estimation of series of conditional models. When estimated the prior distribution have to be assumed, which has implications for the prior distribution of DGSE weight in the hybrid model that can be illustrated with simple simulation procedure. The posterior inference for DGSE weight is indifferent after assuming competing priors for the weighting parameter. The analysis suggest that the modified harmonic mean estimator should not be used as a unique tool for model evaluation.

Keywords: DSGE-VAR, Bayesian inference, marginal data density, prior specification

