

# Nieparametryczna estymacja rozkładu stóp odzysku z ekspozycji kredytowej na bazie krótkich szeregów czasowych\*

## Non-parametrical Estimation of Recovery Rate's Probability Distribution for Credit Exposures to Defaulted Obligors

*Łukasz Kozłowski, Piotr Osiński\*\**

### Streszczenie

W artykule podjęto próbę nieparametrycznej estymacji rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku (ang. *recovery rates, RR*) dla ekspozycji kredytowych banku wobec dłużników, którzy stali się niewypłacalni. Opisanie algorytmów pozwala na pokonanie problemu ograniczonej dostępności danych o stopach odzysku obserwowanych w przeszłości. W analizach zgodnych z założeniami procesów Markowa wykorzystywane są natomiast informacje o kwotach zwindykowanych od dłużników w stosunkowo krótkim okresie.

Metody zaprezentowane na gruncie teoretycznym zastosowano do badania rozkładów stóp odzysku dla czterech różnych portfeli kredytowych. Uzyskane rozkłady charakteryzują się bimodalnością, przy czym najwyższe prawdopodobieństwa zaobserwowano dla bardzo niskich bądź stosunkowo wysokich stóp odzysku. Rezultaty te dobrze wpisują się w wyniki badań innych autorów sugerujące, że wykorzystywanie rozkładu beta do modelowania rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku, choć często praktykowane, należy uznać za nie w pełni uzasadnione.

**Słowa kluczowe:** stopa odzysku, strata w momencie niewypłacalności, LGD, ryzyko kredytowe

### Abstract

The following article presents an approach to non-parametrical estimation of recovery rate's (RR) probability distribution for credit exposures to defaulted obligors. The described algorithms allow to deal with the obstacle of limited available data about past recovery rates. The analyses based on Markov process assumptions make use of information about amounts recovered from defaulted obligors in relatively short time.

The methods presented in the theoretical section are then implemented in order to analyze probability distributions of recovery rates in four different credit portfolios. The obtained probability distributions are bimodal as the highest probabilities have been observed for very low or relatively high recovery rates. The results are in accordance with ones presented by other authors and suggest that the common practice of implementing beta distribution to models of recovery rates should be regarded as not fully justified.

**Keywords:** recovery rate, loss given default, LGD, credit risk

**JEL:** G21, G32

\* Autorzy pragną podziękować anonimowemu recenzentowi, którego uwagi pozwoliły udoskonalić pierwotną wersję artykułu i wzbogacić ją o dodatkowe spostrzeżenia.

\*\* Szkoła Główna Handlowa – Studium Doktoranckie Kolegium Zarządzania i Finansów.

## 1. Wprowadzenie

Zarządzanie ryzykiem kredytowym w banku odbywa się na dwóch poziomach. Może być ono prowadzone z perspektywy poszczególnych ekspozycji kredytowych bądź też w odniesieniu do portfeli kredytowych. W drugim przypadku szczególnie pomocne okazują się metody ilościowe, pozwalające na szacowanie wielkości ryzyka kredytowego poprzez określenie wartości strat oczekiwanych, strat nieoczekiwanych, kredytowej wartości zagrożonej (ang. *Credit Value at Risk, CVaR*), wymogów kapitałowych oraz wskaźników z rodziny RAROC. Szacowanie poziomu portfelowego ryzyka kredytowego wymaga określenia parametrów ryzyka, do których należy zaliczyć przede wszystkim:

- prawdopodobieństwo niewypłacalności (ang. *probability of default, PD*), a więc prawdopodobieństwo, że w konkretnym okresie dłużnik znajdzie się w stanie niewypłacalności,

- stopę odzysku (ang. *recovery rate, RR*), czyli iloraz wartości kwoty zwindykowanej (spłaconej) do wartości niewypłacalnej ekspozycji kredytowej w momencie wystąpienia niewypłacalności dłużnika; dla porządku dodajmy, że niekiedy przy budowie modeli kredytowych nie używa się terminu stopa odzysku (*RR*), lecz pojęcie strata w momencie niewypłacalności (ang. *loss given default, LGD*); wspomniane parametry ryzyka łączy, rzecz jasna, następująca zależność:  $LGD = 1 - RR$ .

W naszym artykule skoncentrujemy się na analizie jednego z parametrów ryzyka kredytowego, a mianowicie stopy odzysku (*RR*) dla portfeli kredytowych banku. Nie ograniczymy się przy tym do estymacji wartości oczekiwanej stopy odzysku czy jej odchylenia standardowego dla zadanego portfela kredytowego, ale wykorzystując techniki nieparametryczne, zbudujemy funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa stopy odzysku.

Analiza stóp odzysku rodzi wiele trudności związanych z wymogami odnośnie do danych wyjściowych oraz brakiem jednolitych standardów rynkowych w zakresie pomiaru stóp odzysku. W praktyce można się spotkać z traktowaniem stopy odzysku jako stałej wartości, a nie zmiennej losowej, mogącej przyjmować różne wartości z różnym prawdopodobieństwem. Podejście takie, choć wykorzystywane jest między innymi w modelu CreditRisk+ zaproponowanym przez Credit Suisse Financial Products, może prowadzić do niedoszacowania poziomu ryzyka kredytowego, a w szczególności do zaniżenia kapitału ekonomicznego pozwalającego pokryć straty nieoczekiwane. Na zagrożenia tego rodzaju wskazują m.in. Hagmann, Renault i Scaillet (2005, s. 341–342), a także Chabaane, Laurent i Salomon (2005, s. 278–279) oraz Frye (2000, s. 13). Dlatego sposób

modelowania, zakładający stałą wartość stopy odzysku, jest zastępowany podejściem traktującym stopę odzysku jako zmienną losową o rozkładzie beta. Do modeli ryzyka kredytowego wykorzystujących tego rodzaju założenie można zaliczyć m.in. CreditMetrics, CreditPortfolioManager oraz CreditPortfolioView (Altman, Resti, Sironi 2005, s. 45–46).

W artykule zwracamy uwagę na fakt, że rozkład beta nie zawsze daje dobre przybliżenie rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku. Można się bowiem spotkać z sytuacją, że stopy odzysku mają rozkład, którego istotną cechą jest bimodalność, czyli występowanie dwóch optimumów lokalnych funkcji gęstości. Rezultaty badań wskazujące na tę własność rozkładu stóp odzysku zaprezentowali między innymi: Hagmann, Renault i Scaillet (2005, s. 334–338), Querci (2005, s. 11–12), Schuermann (2005, s. 14–15), Dermine i Neto de Carvalho (2005, s. 110) oraz Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 31). Autorzy ci w swoich analizach posługiwali się jednak stosunkowo licznymi próbami obrazującymi faktycznie zaobserwowane stopy odzysku z niewypłacalnych ekspozycji kredytowych. W naszym artykule przedstawiamy natomiast podejście bazujące na łańcuchach Markowa, umożliwiające oszacowanie rozkładu stopy odzysku na podstawie krótkich szeregów czasowych i niepełnej informacji w odniesieniu do wszystkich zwindykowanych kwot dla poszczególnych ekspozycji kredytowych w całym okresie ich pozostawania w stanie niewypłacalności. Innymi słowy, oprzemy się na informacjach o kwotach zwindykowanych jedynie w pewnym podokresie pozostawania ekspozycji w stanie niewypłacalności i na tej podstawie będziemy estymować spłaty w okresach nieopisanych przez dostępne dane. Zaproponowanie algorytmu nieparametrycznej estymacji rozkładu stóp odzysku przy ograniczonej dostępności danych historycznych jest drugim celem pracy, oprócz zwrócenia uwagi na bimodalny charakter interesującego nas rozkładu. W analizie empirycznej wykorzystane zostaną dane dotyczące niewypłacalnych ekspozycji kredytowych jednego z dużych banków działających w Polsce.

Poza wprowadzeniem i podsumowaniem artykułu zawiera trzy zasadnicze części. W rozdziale 2. zostaną przedstawione podstawowe zagadnienia związane ze stopami odzysku, w tym przede wszystkim metody ich pomiaru, co pozwoli usytuować nasze rozumowanie i wykorzystane przez nas algorytmy obliczeniowe w istniejącym dorobku nauk finansowych. W tej części artykułu postaramy się ponadto przedstawić uzyskane przez innych autorów wyniki badań empirycznych nad rozkładami stóp odzysku. Szczególną uwagę zwrócimy na fakt, że badania te niejednokrotnie wskazywały na bimodalność jako na cechę charakterystyczną rozkładu stóp odzysku w analizowanych portfelach.

W rozdziale 3. artykułu zaprezentujemy wykorzystywaną przez nas technikę estymacji rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku. Posłużenie się innymi metodami, standardowo spotykanymi w literaturze przedmiotu, nie jest w polskich warunkach możliwe ze względu na brak odpowiednio długich szeregów danych historycznych. Oprócz algorytmu, stanowiącego podstawę tworzenia próby do analizy, przedstawimy także metodę nieparametrycznej estymacji rozkładu prawdopodobieństwa zaproponowaną przez Chena (2000, s. 75) i rozwiniętą przez Hagmanna, Renaulta i Scailleta (2005, s. 324–325). Wspomnianą metodę zastosowaliśmy w naszych badaniach.

W kolejnej części tekstu, tj. w rozdziale 4., omówimy wyniki przeprowadzonych przez nas badań empirycznych dotyczących stóp odzysku dla kredytów bankowych w Polsce. Spróbujemy wykazać, że otrzymane przez nas rezultaty są zgodne z wynikami badań przedstawionymi w zagranicznej literaturze przedmiotu, które zdają się sugerować, że rozkład stóp odzysku jest dość trudny do modelowania i nie daje się przybliżyć rozkładem beta.

Ostatni, 5. rozdział zawiera podsumowanie najważniejszych ustaleń.

## 2. Rozkłady stóp odzysku w świetle dotychczasowych badań empirycznych

Przez pojęcie odzysku rozumiemy tę część wartości ekspozycji w momencie niewypłacalności, którą udaje się zwindykować od niewypłacalnego dłużnika. Warto podkreślić, że samo pojęcie odzysku nie oznacza w tym przypadku jedynie przepływów pieniężnych na rzecz kredytodawcy z tytułu realizacji zabezpieczeń kredytu. Odzysk obejmuje bowiem również dobrowolne spłaty prowizji, odsetek i kapitału dokonane przez dłużnika już po zaistnieniu niewypłacalności. Kalkulując stopę odzysku, w zasadzie powinno się pomniejszać tak wyznaczone przepływy pieniężne na rzecz kredytodawcy o poniesione koszty z tytułu windykacji, w tym koszty prawne, a także koszty administracyjnej obsługi niewypłacalnej ekspozycji kredytowej. W bankach precyzyjna kalkulacja i alokacja wspomnianych kosztów do poszczególnych ekspozycji kredytowych są z reguły utrudnione. Dlatego często można się spotkać z badaniami pomijającymi kwestię poniesionych kosztów procesu windykacji. Przykłady takiego podejścia odnajdujemy w pracach: Carty i Liebermana (1996, s. 6), a także Dermine'a i Neto de Carvalho (2005, s. 107–108) oraz Aratena, Jacobsa Jr. i Varshneya (2004, s. 29). Ponadto, jak podkreśla Querci (2005, s. 3), koszty windykacji nie zostały uwzględnione również w badaniach, jakie przeprowadził w 2001 r. bank centralny Włoch, ponieważ nie wszyscy respondenci (banki działające we

Włoszech) byli w stanie przypisać koszty do poszczególnych niewypłacalnych ekspozycji kredytowych. Również w naszym badaniu wykorzystamy podejście wyłączające koszty windykacji z analizy stóp odzysku. Takie uproszczenie nie powinno prowadzić do istotnego zniekształcenia wyników, gdyż – jak podkreślają Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 29) – uwzględnienie kosztów skutkuje przeciętnie spadkiem średniej stopy odzysku o zaledwie jeden punkt procentowy.

Dodajmy ponadto, że wszystkie zarejestrowane spłaty będą dyskontowane na moment zaistnienia niewypłacalności. Potrzeba odrzucenia podejścia księgowego (nieuwzględniającego dyskontowania) na rzecz podejścia ekonomicznego (uwzględniającego zmiany pieniądza w czasie) wydaje się oczywista i tak też jest traktowana w literaturze przedmiotu. Ze wszystkich znanych nam badań jedynie Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 28–35) przedstawili wyniki analiz stóp odzysku bez dyskontowania wartości nominalnych przepływów pieniężnych, ale i tak uczynili to jedynie w celach porównawczych, gdyż równoległe przeprowadzili analizę uwzględniającą zmianę wartości pieniądza w czasie.

Wartość stopy odzysku dla pojedynczej ekspozycji kredytowej zależy od wielu czynników, wśród których do najistotniejszych zalicza się między innymi: rodzaj i wartość ustanowionego zabezpieczenia, stopień podporządkowania zobowiązania w strukturze pasywów dłużnika, rodzaj instrumentu finansowego kreującego zobowiązanie, kondycję gospodarki, typ dłużnika (klient detaliczny lub korporacyjny) oraz charakter działalności gospodarczej dłużnika (Schuermann 2005, s. 4–5). Część czynników, o których wspomniano powyżej, wykorzystaliśmy w naszym badaniu do wyodrębnienia portfeli kredytowych. Wyróżniliśmy przy tym:

- portfele wg zasady produktowej, tj. portfele ekspozycji wobec podobnych typów dłużników i powstające przy użyciu zbliżonych technik kredytowania. Wyróżnienie tych portfeli jest zgodne z linią podziału przyjętą w banku, którego ekspozycje kredytowe poddane zostały analizie.

- portfele wg kryterium branżowego, tj. portfele ekspozycji wobec podmiotów gospodarczych działających w tej samej lub podobnej branży.

Istnieje wiele metod szacowania stopy odzysku, jednak nie wszystkie podejścia mają jednakowe obszary zastosowania. W szczególności występują inne metody ustalania stopy odzysku dla dłużnych papierów wartościowych, np. obligacji wprowadzonych do obrotu rynkowego, a inne dla instrumentów niecechujących się wysoką płynnością, np. kredytów bankowych. Mimo to wszystkie techniki wyznaczania stóp odzysku można sklasyfikować, jak proponuje Schuermann (2005, s. 6–8), w następujący sposób:

- Kalkulacja stopy odzysku na podstawie rynkowej ceny instrumentu w momencie zaistnienia niewypłacalności dłużnika lub po upływie pewnego krótkiego czasu<sup>1</sup>. Zaletą tej techniki jest brak konieczności rejestrowania i dyskontowania przepływów pieniężnych z niewypłacalnego instrumentu, ponieważ są one odzwierciedlone w jego cenie rynkowej.

- Estymacja stóp odzysku na podstawie analizy różnic wysokości stóp dochodu obligacji skarbowych i obligacji komercyjnych, przy założeniu wypłacalności emitentów obydwu instrumentów. Nadwyżka oferowanej stopy dochodu obligacji komercyjnych ponad stopę „wolną od ryzyka” odzwierciedla poziom ryzyka niewypłacalności, ryzyka windykacji i ryzyka płynności. W związku z tym oszacowanie części nadwyżki, jaka wynika z występowania ryzyka windykacji, jest podstawą wyznaczenia stopy odzysku.

- Szacowanie stóp odzysku na podstawie analizy zdyskontowanych przepływów pieniężnych, które zostały zaobserwowane już po wystąpieniu niewypłacalności dłużników.

W prezentowanym artykule, jak już wspomnieliśmy, do analizy stóp odzysku wykorzystamy ostatnie z zaprezentowanych podejść. Posłużenie się jednym z dwóch pierwszych sposobów jest w zasadzie niemożliwe w polskich warunkach, ponieważ nie istnieją wystarczająco płynne rynki, na których byłyby notowane długoterminowe instrumenty dłużne. Należy podkreślić, że estymacja rozkładu stóp odzysku w drodze analizy zdyskontowanych przepływów pieniężnych również nie jest łatwe. Jak bowiem wiadomo, proces windykacji należnych kwot od niewypłacalnych kredytobiorców jest z reguły długotrwały, co oznacza, że dla uzyskania próby rzeczywistych stóp odzysku należałoby dysponować bazą danych opisującą stosunkowo długi okres historyczny. Skalę tych trudności obrazują wyniki badań Querci (2005, s. 4–5). Wynika z nich, że windykacja kredytów bankowych może trwać nawet ponad 20 lat, a przeciętnie jedna czwarta wszystkich procesów windykacyjnych nie kończy się przed upływem 5 lat od momentu zaistnienia niewypłacalności dłużnika. Dlatego w tym artykule postaramy się wykorzystać technikę pozwalającą rozwiązać problem niedostępności danych w odniesieniu do wieloletnich procesów windykacyjnych. Opierając modelowanie na procesach Markowa i splotach zaobserwowanych w stosunkowo krótkim okresie, wyznaczmy możliwe ścieżki windykacji dla kredytów. Częstotliwość występowania poszczególnych ścieżek będzie przy tym wynikać z przesunięć ekspozycji w obrębie tych fragmentów ścieżek, które zostały już zaobserwowane. Szczegóły konstrukcji modelu opiszemy w kolejnym rozdziale artykułu.

Jak wspomnieliśmy we wprowadzeniu, jednym z dwóch celów prezentowanego artykułu jest estymacja rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku i weryfikacja zasadności wykorzystania rozkładu beta do jego modelowania. Dotychczasowe badania przeprowadzone przez innych autorów sugerują, że nie zawsze rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa stopy odzysku można przybliżyć jednym z powszechnie wykorzystywanych rozkładów teoretycznych. Przykładowo Hagmann, Renault i Scaillet (2005, s. 334–338) podczas analizy rozkładów stóp odzysku na podstawie cen niewypłacalnych obligacji amerykańskich przedsiębiorstw dla różnych sektorów gospodarki w latach 1981–1999 zauważają, że rozkłady te są często bimodalne, przy czym mody występują w bardzo różnych punktach określoności rozkładu, m.in. dla około 55% i 85% czy dla około 20% i 35%. W niektórych przypadkach potwierdza się nawet obecność więcej niż dwóch mód. Zdaniem tych autorów zaobserwowane cechy rozkładów empirycznych podważają zasadność stosowania rozkładu beta do modelowania stóp odzysku. Wykazują oni, że kredytowa wartość zagrożona (*CVaR*) jest istotnie wyższa, gdy podczas jej wyznaczania wykorzystuje się rozkład empiryczny, a nie rozkład beta.

Bimodalność rozkładu stóp odzysku szacowanych na podstawie cen niewypłacalnych obligacji amerykańskich przedsiębiorstw w latach 1970–2003 zauważa również Schuermann (2005, s. 14–15). Stwierdza on, że jedna z mód występuje zwykle w przedziale 20–30%, a druga 70–80%, przy czym moda pojawiająca się z lewej strony określoności rozkładu jest zwykle wyższa. Autor podkreśla również, że ze względu na bimodalność rozkładu decyzje inwestycyjne opierające się jedynie na analizie średnich stóp odzysku mogą być obciążone znacznym błędem.

Rozkłady stóp odzysku z niewypłacalnych kredytów we włoskim systemie bankowym zbadali z kolei Grippa, Iannotti i Leandri (2005, s. 132). Autorzy ci również zaobserwowali bimodalność rozkładu stóp odzysku, jednak nie występowała ona dla wszystkich typów analizowanych ekspozycji kredytowych. W przypadku dobrze zabezpieczonych kredytów wyraźnie widać dwie mody – jedną w okolicach 20–30%, a drugą na prawym końcu przedziału określoności rozkładu stóp odzysku. Grippa, Iannotti i Leandri (2005), jak też wspomniani poprzednio Hagmann, Renault i Scaillet (2005) oraz Schuermann (2005) w procesie estymacji rozkładów stóp odzysku nie posłużyli się histogramami, ale estymatorami ciągłymi, które zostaną wykorzystane również w naszym opracowaniu.

Rozkład stóp odzysku z kredytów udzielonych tylko przez jeden bank analizowali natomiast Querci (2005) oraz Dermine'a i Neto de Carvalho (2005), a także Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004). Choć autorzy ci posługują się danymi z różnych rynków, we

<sup>1</sup> Przykładowo Moody's zwykł wyliczać stopę odzysku dla obligacji jako cenę obligacji w miesiąc po wystąpieniu niewypłacalności, odniesioną do wartości nominalnej tej obligacji.



wszystkich przypadkach ich badania wskazują, że cechą rozkładów stóp odzysku jest bimodalność.

Wykorzystując informacje za lata 1980–2004 w odniesieniu do kredytów udzielonych przez jeden z włoskich banków, Querci (2005, s. 11–12) podzieliła analizowane ekspozycje na portfele według różnych kryteriów. W każdym przypadku rozkłady stóp odzysku dla wyróżnionych portfeli były bimodalne, przy czym mody pojawiały się, jak w wielu innych badaniach, na skrajach przedziału określoności, tj. dla stóp odzysku wynoszących od 0 do 10% oraz od 90 do 100%.

Do bardzo podobnych konkluzji w sprawie bimodalności rozkładu stóp odzysku doszli Dermine i Neto de Carvalho (2005, s. 110). Posłużyli się danymi dostarczonymi przez największy prywatny bank portugalski, Banco Comercial Português. Autorzy ci zauważają ponadto, że średnia wysokość kwot windykowanych od niewypłacalnych dłużników w każdym kolejnym miesiącu po wystąpieniu niewypłacalności jest coraz niższa i w zasadzie spada do zera po około 50 miesiącach. Nie jest więc istotnym błędem ograniczenie analizy procesów windykacyjnych do określonej odgórnie liczby kolejnych miesięcy pozostawiania dłużnika w stanie niewypłacalności.

Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 31) analizowali skuteczność windykacji w amerykańskim banku JPMorgan Chase w latach 1982–2002 i również w tym przypadku zaobserwowane zostały mody występujące w okolicach 0% i 100%. Na uwagę zasługuje ponadto fakt, że w tym badaniu stopy odzysku dla poszczególnych ekspozycji przekraczały niekiedy wartość 100%. Podobne zjawisko obserwujemy w pracach Schuermanna (2005, s. 14–15), który zbudował estymatory rozkładu stóp odzysku oparte na przedziale 0–130%, oraz Laurent i Schmita (2005, s. 315), którzy zaobserwowali przypadki stóp odzysku przewyższających wartość 100% nawet o kilkaset punktów procentowych. Występowanie stóp odzysku przekraczających 100% jest więc możliwe nie tylko teoretycznie i wynika chociażby z faktu, że pewna część dłużników, początkowo niewypłacalnych, powraca do dobrej kondycji ekonomicznej i jest w stanie spłacić nie tylko zobowiązania kapitałowe, ale także dodatkowe odsetki narosłe przez okres pozostawiania w stanie niewypłacalności.

Dodajmy, że wspomniane badania Laurent i Schmita (2005) po raz kolejny potwierdzają bimodalność rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku. Autorzy ci, opierając się na danych z lat 1988–2003, analizują zdyskontowane przepływy pieniężne od niewypłacalnych klientów dużego europejskiego przedsiębiorstwa leasingowego i sugerują występowanie jednej mody dla stopy odzysku zbliżonej do 0%, a drugiej dla stopy odzysku około 100%.

Oprócz omawianych powyżej prac, znanych nam z oryginału, w literaturze przedmiotu spotkaliśmy się również z powoływaniem na następujących autorów, którzy potwierdzili bimodalność rozkładów stóp odzysku w swoich badaniach empirycznych: Felsovalyi i Hurt (1998, s. 41–46; analiza stóp odzysku dla rynków Ameryki Łacińskiej), Asarnow i Edwards (1995, s. 11–23; badanie dotyczące kredytów udzielonych przez Citibank) oraz Bosworth i Eales (1998, s. 58–65; analiza stóp odzysku w bankowości australijskiej).

Dla uzyskania pełnego obrazu wyników badań empirycznych referowanych w literaturze przedmiotu należy zaznaczyć, że można w niej również spotkać wyniki badań podważających twierdzenie o bimodalności rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku, choć równocześnie niekoniecznie potwierdzające tezę o podobieństwie tego rozkładu do rozkładu beta. Rezultaty o takim charakterze przedstawili: Hu i Perraudin (2002, s. 22), Carty, Gates i Gupton (1996, s. 8–9), a także Maclachlan (2005, s. 301). Badania tych autorów dotyczyły różnych rynków i zostały wykonane przy użyciu odmiennych metodologii. Hu i Perraudin (2002) oraz Carty, Gates i Gupton (1996) analizowali ceny niewypłacalnych instrumentów na rynku amerykańskim. Maclachlan (2005) zweryfikował natomiast rozkład stóp odzysku z ekspozycji kredytowych jednej australijskiej grupy bankowej wobec niewypłacalnych dłużników. Należy jednak zaznaczyć, że tylko dla jednego portfela kredytowego analizowanego przez tego ostatniego autora udało się zgromadzić stosunkowo liczną próbę sum zdyskontowanych przepływów pieniężnych zrealizowanych w trakcie procesu windykacji (174 obserwacje). Rozkład stopy odzysku w tej próbie odznacza się jedną modą umiejscowioną w okolicach wartości stopy odzysku wynoszącej 0,9.

### 3. Zasady estymacji rozkładu stopy odzysku w oparciu o łańcuch Markowa

#### 3.1. Podstawowe własności łańcuchów Markowa wpływające na proces estymacji

Jak nadmieniliśmy, w naszym badaniu nie możemy oprzeć się na danych historycznych opisujących skończone procesy windykacji dla określonych ekspozycji kredytowych. Procesy te trwają zwykle kilka, a niekiedy nawet kilkanaście lat, podczas gdy dostępne nam dane opisują okres około dwóch lat. Innymi słowy dla każdej ekspozycji, która w analizowanym przez nas okresie znalazła się w stanie niewypłacalności, możemy wyznaczyć jedynie część spłat. Tymczasem zdyskontowana suma wszystkich spłat dokonanych w pełnym procesie windykacji pozostaje nieznana, ponieważ obejmuje

także te spłaty, które dopiero nastąpią i nie są opisane przez dane historyczne. Dlatego w naszej analizie poczynimy założenia charakterystyczne dla łańcuchów Markowa.

Jak wiadomo, ciąg zmiennych losowych  $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ , o wartościach w przeliczalnym zbiorze  $S$  (przestrzeni stanów) nazywamy łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $t \in \mathbb{N}$ , i  $s_0, s_1, \dots, s_t \in S$  każdego ciągu spełniona jest poniższa równość (Jakubowski, Sztencel 2004, s. 264):

$$P(X_t = s_t | X_{t-1} = s_{t-1}, \dots, X_1 = s_1, X_0 = s_0) = P(X_t = s_t | X_{t-1} = s_{t-1}) \quad (1)$$

jeśli tylko

$$P(X_{t-1} = s_{t-1}, \dots, X_1 = s_1, X_0 = s_0) > 0.$$

Łańcuch Markowa wyróżnia się pewną liczbą dopuszczalnych stanów oraz regułami przechodzenia pomiędzy nimi. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku łańcuchów Markowa szansa znalezienia się w danym stanie w chwili  $t$  zależy tylko i wyłącznie od tego, w jakim stanie znajdowaliśmy się w chwili  $t-1$ , oraz od reguł przechodzenia, określających sposób zachowania się rozkładu w momencie zmiany stanu. Nie jest istotne to, ile różnych stanów wystąpiło w poprzedzających okresach. Innymi słowy można stwierdzić, że w przypadku łańcuchów Markowa mamy do czynienia z „zapominaniem o przeszłości”, a przyszłość zależy jedynie od teraźniejszości. W celu wykorzystania łańcucha Markowa do modelowania procesów konieczne jest zatem ustalenie stanu wyjściowego oraz reguł przechodzenia do kolejnych stanów. Stan początkowy odgrywa istotną rolę, gdyż określa możliwości znalezienia się w poszczególnych stanach w następnych okresach. Podkreślimy ponadto, że reguły zmiany stanów z okresu na okres zawierają w sobie element stochastyczny. Sposób zmiany stanu nie jest zatem pewny, lecz jest zmienną losową z zadany rozkładem prawdopodobieństwa. Spróbujemy teraz zobrazować, w jaki sposób własności łańcuchów Markowa zastosowane zostaną w naszej analizie.

### 3.2. Przygotowanie danych do analizy

Estymacja rozkładu stopy odzysku zostanie dokonana na podstawie danych historycznych odzwierciedlających zarejestrowane comiesięczne spłaty zadłużenia dla różnych ekspozycji kredytowych, dla których na każdy moment były znane: liczba dni przeterminowania w spłacie oraz wartość zadłużenia kapitałowego wobec banku. Na szczególną uwagę zasługuje sposób konstrukcji próby stanowiącej punkt wyjścia do analizy. Próba ta jest *de facto* zbiorem miesięcznych zmian sytuacji, w jakich znajdowały się ekspozycje kredytowe. Każda zmiana wiąże się przy tym z: zmianą zadłużenia kapitałowego, zmianą liczby dni

przeterminowania w spłacie oraz ze spłatą zadłużenia dokonaną w ciągu miesiąca. Uściślając, każdy spośród obiektów z próby opisywany jest przez wektor w pięciowymiarowej przestrzeni:

$$Y_i = (CI_i, CE_i, KI_i, KE_i, P_i) \quad (2)$$

gdzie:

$Y_i$  – wektor opisujący  $i$ -tą zmianę sytuacji w ciągu miesiąca,

$CI_i$  – wartość zadłużenia kapitałowego ekspozycji przed zaistnieniem  $i$ -tej zmiany,

$CE_i$  – wartość zadłużenia kapitałowego ekspozycji po zaistnieniu  $i$ -tej zmiany,

$KI_i$  – klasa ryzyka ekspozycji przed zaistnieniem  $i$ -tej zmiany,

$KE_i$  – klasa ryzyka ekspozycji po zaistnieniu  $i$ -tej zmiany,

$P_i$  – spłata zadłużenia w ramach ekspozycji, która dokonana została w trakcie  $i$ -tej zmiany.

Klasę ryzyka  $KI_i$  określa następująca formuła (w analogiczny sposób definiuje się końcową klasę ryzyka  $KE_i$ ):

$$KI_i = Int[(DI_i - 1)/30] + 2 \quad (3)$$

Powyższy sposób ujęcia klas ryzyka oznacza, że zbiór ich wartości zawiera się w zbiorze liczb naturalnych. Ponadto wszystkie klasy poza pierwszą są związane z 30-dniowymi przedziałami dni przeterminowania w spłacie:  $\langle 1;30 \rangle$ ,  $\langle 31;60 \rangle$ ;  $\langle 61;90 \rangle$  itd. Numer klasy ryzyka wskazuje bezpośrednio na występowanie bądź niewystępowanie stanu niewypłacalności w danym momencie. Na potrzeby naszego badania przyjęliśmy bowiem, że niewypłacalność będzie rozumiana jako występowanie opóźnienia w spłacie kapitału lub odsetek przekraczającego 90 dni. Oznacza to, że wszystkie klasy ryzyka od piątej wzwyż są klasami niewypłacalności. Dodajmy, że wykorzystywana przez nas definicja niewypłacalności zawiera w sobie zasadnicze i zarazem jedyne ilościowe kryterium niewypłacalności rekomendowane przez Komitet Bazylejski w Nowej Umowie Kapitałowej (Basel Committee on Banking Supervision 2004, art. 452). Ponadto, jak podkreślają Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 29), przekroczenie granicy 90 dni opóźnienia w spłacie jest również podstawowym wyznacznikiem niewypłacalności uwzględnianym w bankowości amerykańskiej.

Należy podkreślić, że każda ekspozycja kredytowa sklasyfikowana jako niewypłacalna na początku któregośkolwiek z miesięcy, dla których dostępne są dane historyczne, dostarcza zwykle wielu obserwacji do próby  $Y_i$  wykorzystywanej w procesie estymacji. Przykładowo, jeżeli dla ekspozycji na początku pierwszego miesiąca raportowano niewypłacalność i przez trzy pierwsze miesiące odnotowywane były

splaty, a w trakcie czwartego kolejnego miesiąca zakończył się proces windykacji, to w próbie  $Y_i$  pojawia się z tego tytułu cztery zmiany sytuacji ekspozycji. Jeżeli natomiast ekspozycja znalazła się w stanie niewypłacalności dopiero na początku ostatniego miesiąca, dla którego dostępne są dane historyczne, to wygeneruje ona tylko jedną zmianę sytuacji uwzględnioną w naszej próbie.

Jak łatwo zauważyć, informacje pochodzące z próby  $Y_i$  pozwalają na wyznaczenie dla poszczególnych obserwacji stóp miesięcznej spłaty, a także stóp miesięcznej zmiany zadłużenia. Stopa miesięcznej spłaty jest przy tym definiowana jako iloraz wartości kwoty zwindykowanej (spłaconej) w ciągu miesiąca dla danej ekspozycji kredytowej do wartości zadłużenia kapitałowego tej ekspozycji na początku miesiąca. Stopa miesięcznej zmiany zadłużenia jest z kolei ilorazem wartości zadłużenia kapitałowego na końcu miesiąca do wartości zadłużenia kapitałowego na początku miesiąca dla danej ekspozycji. Nie ma bezpośredniego przełożenia wartości stopy miesięcznej spłaty na wartość stopy miesięcznej zmiany zadłużenia, ponieważ spłaty obejmują wszystkie windykowane kwoty, w tym między innymi odsetki i prowizje, a zmiana zadłużenia dotyczy tylko zadłużenia kapitałowego.

Zarejestrowane stopy miesięcznej spłaty oraz stopy miesięcznej zmiany zadłużenia okazują się przydatne podczas estymacji rozkładu stóp odzysku na podstawie łańcucha Markowa. Aby próba zawierała informacje na temat stóp miesięcznej spłaty i stóp miesięcznej zmiany zadłużenia, modyfikuje się zbiór  $Y_i$ , zastępując go zbiorem wektorów  $X_i$ , które definiuje się następująco:

$$X_i = (CI_i, C_i, KI_i, KE_i, R_i) \quad (4)$$

gdzie:

$C_i = CE_i / CI_i$  – stopa miesięcznej zmiany zadłużenia dla zarejestrowanej  $i$ -tej zmiany sytuacji,

$R_i = P_i / CI_i$  – stopa miesięcznej spłaty dla zarejestrowanej  $i$ -tej zmiany sytuacji.

Tak przygotowana próba jest punktem wyjścia do estymacji rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku zgodnie z łańcuchem Markowa. Próba ta obejmuje wszystkie zmiany sytuacji ekspozycji, które na początku danego miesięcznego okresu zmiany lub kiedykolwiek wcześniej zostały sklasyfikowane jako niewypłacalne.

### 3.3. Proces generowania stóp odzysku do analizy rozkładu

Zakładamy, że teoretyczna ekspozycja kredytowa  $e$  przeszła właśnie w stan niewypłacalności i znajduje się w momencie  $t = 0$ . W każdym kolejnym momencie  $t$  ekspozycja ta może przyjmować jedną spośród  $S$  klas ryzyka (stanów). Jak już wspomniano, kla-

sy te określiliśmy jako przedziały liczby dni przeterminowania spłaty. Ze względu na to, że zmiany stanów teoretycznej ekspozycji opisuje proces Markowa, przejścia (migracje) tej ekspozycji w okresie od  $t$  do  $t+1$  zależą wyłącznie od klasy ryzyka ekspozycji w momencie  $t$ . Prawdopodobieństwa migracji ekspozycji między klasami z okresu na okres zależą natomiast od tego, jak często następują poszczególne historyczne zmiany klas w próbie będącej podstawą do estymacji.

Ostatecznie estymacja całkowitej stopy odzysku opiera się na symulacyjnym badaniu zmian klas teoretycznej ekspozycji kredytowej  $e$  w ciągu następujących po sobie okresów miesięcznych (od  $t = 0$  do  $t = 1$ , od  $t = 1$  do  $t = 2$  itd.). Dla teoretycznej ekspozycji kredytowej  $e$  wyznaczona zostaje losowo ścieżka migracji, stanowiąca ciąg klas ryzyka, w których będzie się znajdować ta ekspozycja w kolejnych momentach w przyszłości aż do zakończenia procesu windykacji. Ponieważ do poszczególnych wylosowanych zmian klas przypisane są stopy miesięcznej spłaty oraz stopy miesięcznej zmiany zadłużenia, wraz ze ścieżką klas ryzyka budowany jest ciąg miesięcznych spłat, które po zdyskontowaniu na moment  $t = 0$  i zsumowaniu dają miarę skuteczności windykacji. Procedura ta prowadzi do wyznaczenia stopy odzysku w pojedynczym powtórzeniu symulacji, a jej wielokrotne powtórzenie (np. 10 000 razy) przynosi rezultat w postaci zbudowania próby, na podstawie której będzie szacowany rozkład prawdopodobieństwa stopy odzysku dla teoretycznej ekspozycji, która dopiero co znalazła się w stanie niewypłacalności, czyli w piątej klasie ryzyka.

Precyzując, każde z  $n$  powtórzeń symulacji prowadzi do uzyskania stopy odzysku  $RR_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ), i opiera się na poniższym algorytmie:

1. Zakładamy, że teoretyczna ekspozycja kredytowa  $e$  w momencie  $t = 0$  ma jednostkową wartość zadłużenia kapitałowego ( $ci_{t=0} = 1$ ) i znalazła się w stanie niewypłacalności, czyli w piątej klasie ryzyka ( $ki_{t=0} = 5$ ).

2. Symulacja ścieżki migracji dla teoretycznej ekspozycji  $e$  odbywa się do momentu, gdy całe zadłużenie ekspozycji  $e$  zostanie spłacone lub umorzone ( $ci_t = 0$ ) bądź gdy ekspozycja  $e$  osiągnie tzw. pierwszą nieuwzględnianą klasę ryzyka  $KL$  (tj. gdy  $ki_t = KL$ ). Pierwsza nieuwzględniana klasa ryzyka ma z reguły bardzo wysoki numer i ustala się ją arbitralnie. Jest to zwykle taka klasa, że zarówno dla niej, jak i dla kolejnych klas oczekiwane miesięczne stopy spłaty są zerowe lub bardzo niskie. Pierwszą nieuwzględnianą klasę ryzyka wybiera się również na podstawie analizy liczby obiektów z zadaną początkową klasą ryzyka w próbie  $X_i$ . Gdy liczba ta jest niska, a klasa zawiera raportowane zmiany sytuacji z ponadnormatywnie dużymi stopami miesięcznej spłaty, to istnieje ryzyko,

że włączenie tej klasy do analizy zniekształci rezultaty symulacji. Wówczas klasa ta powinna zostać pierwszą nieuwzględnianą klasą ryzyka –  $KL$ .

3. Określenie migracji ekspozycji  $e$  w pojedynczym miesiącu od momentu  $t$  do momentu  $t + 1$  odbywa się w drodze wylosowania jednej zmiany sytuacji  $e'$  z próby  $X_t$ . Ścisłej rzecz ujmując, zmiana  $e'$  jest losowana spośród takich zmian raportowanych w próbie  $X_t$ , że początkowa klasa ryzyka  $KI_t$  dla zmiany była taka sama jak klasa ryzyka  $ki_t$  teoretycznej ekspozycji  $e$  na  $t$ -tym etapie ścieżki windykacji. Wylosowana zmiana sytuacji  $e'$  determinuje sposób migracji teoretycznej ekspozycji  $e$  oraz stopę miesięcznej spłaty dla ekspozycji  $e$  w okresie od  $t$  do  $t + 1$ . Innymi słowy, jeżeli wylosowanej zmianie sytuacji  $e'$  odpowiada wektor  $X_k = (CI_k, C_k, KI_k, KE_k, R_k)$ , to przyjmuje się, że zadłużenie kapitałowe ekspozycji  $e$  zmieni się  $C_k$  razy ( $ci_{t+1} = ci_t \cdot C_k$ ), ekspozycja ta przesunie się do klasy ryzyka  $KE_k$  ( $ki_{t+1} = KE_k$ ), a spłata  $s_{t,t+1}$  zadłużenia dla ekspozycji  $e$  w okresie od  $t$  do  $t + 1$  wyniesie:  $s_{t,t+1} = ci_t \cdot R_k$ .

4. Zauważmy, że w próbie  $X_t$  znajdują się zmiany stanów z taką samą początkową klasą i podobnymi stopami miesięcznej spłaty  $C_j$ . Niemniej znaczenie ekonomiczne tych obiektów może być zdecydowanie inne, ponieważ spłaty różniły się od siebie pod względem wartości. Inną wagę dla wierzyciela ma spłata w wysokości 1 mln zł dokonana przez dłużnika, który był winien 10 mln zł, a inne znaczenie ma spłata w wysokości 1 zł dokonana przez dłużnika, którego zadłużenie wynosiło tylko 10 zł. Dlatego w literaturze przedmiotu z reguły wyznacza się stopę odzysku ważoną wartością zaangażowania. W związku z tym do algorytmu symulacyjnego wprowadzamy następującą uwagę: podczas losowania zmiany  $e'$  prawdopodobieństwa wylosowania poszczególnych obiektów  $X_j$  z tą samą klasą ryzyka  $KI_j$  nie są takie same, lecz wprost proporcjonalne do wielkości zadłużenia kapitałowego  $CI_j$  dla tych obiektów z próby. Załóżmy np., że obiekty  $X_j$  i  $X_k$  mają taką samą początkową klasę ryzyka co teoretyczna ekspozycja  $e$  w momencie  $t$  ( $KI_j = KI_k = ki_t$ ), ale saldo zadłużenia kapitałowego  $CI_j$  jest dwa razy większe od salda zadłużenia kapitałowego  $CI_k$  ( $CI_j = 2 \cdot CI_k$ ). Prawdopodobieństwo wylosowania obiektu  $X_j$  jest wówczas dwa razy większe od prawdopodobieństwa wylosowania obiektu  $X_k$ . Podsumowując, prawdopodobieństwo wylosowania obiektu  $X_j$  z klasą ryzyka  $KI_j = d$  wyznaczone jest według poniższej formuły:

$$P(X_j) = \frac{CI_j}{\sum_{KI_i=d} CI_i} \quad (5)$$

5. Losowo wygenerowane spłaty dla teoretycznej ekspozycji  $e$  w trakcie ścieżki jej windykacji są dyskontowane na moment  $t = 0$  i następnie sumowane:

$$SS = \sum_{t=0}^T \frac{s_{t,t+1}}{(1+r/12)^t} \quad (6)$$

gdzie:

$SS$  – suma zdyskontowanych spłat dla teoretycznej ekspozycji  $e$ ,

$r$  – roczna stopa procentowa wykorzystywana do dyskontowania,

$T$  – moment, w którym zgodnie z zasadami przedstawionymi w pkt 2. zakończyła się ścieżka windykacji dla ekspozycji  $e$ .

Suma zdyskontowanych spłat  $SS$  określa całkowitą kwotę zwindykowaną z teoretycznej ekspozycji  $e$ . Biorąc pod uwagę, że wartość zadłużenia kapitałowego w momencie wystąpienia niewypłacalności była równa jedności ( $ci_{t=0} = 1$ ), suma zdyskontowanych spłat jest równocześnie wartością stopy odzysku  $RR_m$  uzyskaną w  $m$ -tym powtórzeniu symulacji.

Średnia wartość całkowitych stóp odzysku uzyskanych w trakcie  $n$  powtórzeń symulacji jest estymatorem wartości oczekiwanej stopy odzysku. Poszczególne wygenerowane losowo wartości  $RR_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ) są natomiast podstawą do wyznaczenia estymatora rozkładu prawdopodobieństwa stopy odzysku.

Algorytm symulacyjny opisany w punktach 1–5 odpowiada procesowi Markowa, z tym że migracje pomiędzy poszczególnymi stanami zostały określone w sposób nieparametryczny, a nie w sposób parametryczny, jak w przypadku klasycznego zastosowania łańcuchów Markowa do modelowania procesów. Zbliżoną nieparametryczną technikę modelowania migracji w ramach procesów Markowa opisali Rajagopalan i Lall (1999, s. 3089–3101). Autorzy ci wykorzystali jednak nieparametryczny algorytm symulacyjny do prognozowania pogody na podstawie zaobserwowanych historycznych jednodniowych zmian stanów pogody.

Na zakończenie prezentacji algorytmu generowania stóp odzysku warto zaznaczyć, że niekiedy w próbie wykorzystywanej do estymacji mogą się znaleźć pozycje, które nie mają zadłużenia kapitałowego, lecz jedynie zadłużenie odsetkowe. Włączenie takich pozycji do analizy stóp odzysku wiąże się jednak z pewnymi niedogodnościami, ponieważ nie jest możliwe wyznaczenie dla nich stopy miesięcznej spłaty oraz stopy miesięcznej zmiany zadłużenia. Sposobem na rozwiązanie tego problemu może być usunięcie z próby  $Y_t$  obiektów z zerowym zadłużeniem kapitałowym  $CI_t$  i jednoczesne rozdzielenie przypadających na nie spłat  $P_t$  pomiędzy obiekty z tą samą klasą ryzyka  $KI_t$ , ale mające niezerowe zadłużenie kapitałowe  $CI_t$ . Wielkość takiej alokacji spłat na poszczególne obiekty powinna jednak być wprost proporcjonalna do ich zadłużenia kapitałowego lub do spłat dla nich raportowanych.



### 3.4. Nieparametryczna estymacja rozkładu stóp odzysku

Podstawowe podejście do estymacji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej polega na wyznaczeniu parametrów danego rozkładu na podstawie próby losowej. W sytuacji, gdy mamy pewność, z jakiego typu rozkładu pochodzi próba, wykorzystanie estymatora parametrycznego jest jak najbardziej zasadne, gdyż wówczas jest on precyzyjny, a przy jego budowie wymagana jest stosunkowo niewielka liczba obserwacji. Jak wskazują Haggmann, Renault i Scaillet (2005, s. 344), w przypadku rozkładów znacznie odbiegających od znanych rozkładów (np. od rozkładów: normalnego, beta lub gamma) estymacja parametryczna może jednak prowadzić do dużych błędów, co oznacza, że wartości estymatora funkcji gęstości w punktach mogą znacznie odbiegać od wartości rzeczywistych. Dlatego też w sytuacji, gdy nie ma pewności co do postaci rozkładu, z jakiego pochodzi próba, korzystne jest szacowanie funkcji gęstości w sposób bezpośredni, tj. nieparametryczny. Pozwala to nie tylko na estymację dowolnego rozkładu, ale także na proste porównanie wykresu estymatora z wykresami funkcji gęstości rozkładów teoretycznych. Główną zaletą omawianego podejścia jest jednak ograniczenie błędu estymatora, mierzonego jako scałkowany błąd średniokwadratowy:

$$R(\hat{f}) = E \int_A [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx \quad (7)$$

gdzie:

$\hat{f}$  – estymator funkcji gęstości  $f$ ,

$A$  – obszar, na którym określona jest estymowana funkcja gęstości, tj. przedział wartości, jakie może przyjmować zmienna  $X$ .

Najprostszą i najbardziej znaną formą estymacji nieparametrycznej jest histogram, obrazujący częstość występowania zmiennej losowej z zadanego przedziału jej wartości. Ze względu na to, że histogram jest estymatorem nieciągłym, nie może być precyzyjnym sposobem oszacowania funkcji gęstości stopy odzysku, gdyż jest ona zmienną ciągłą. Rozwiązaniem problemu nieparametrycznej estymacji rozkładów ciągłych jest estymator jądrowy, a także jego rozszerzenie – estymator semiparametryczny, czyli oparty na parametrycznej bazie i nieparametrycznym czynnikiem korygującym.

#### 3.4.1. Estymator jądrowy

Estymacja jądrowa funkcji gęstości zawsze opiera się na funkcji jądra, przez którą rozumie się dowolną funkcję  $K(z)$ , spełniającą warunek:

$$\int_A K(z) dz = 1 \quad (8)$$

Najbardziej rozpowszechnioną wersją estymatora jądrowego jest estymator bazujący na jądrze gaussowskim, tj. taki, dla którego funkcja  $K(z)$  jest funkcją gęstości standardowego rozkładu normalnego. W tych warunkach, mając daną próbę losową,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  definiuje się estymator jądrowy  $\hat{f}$  oparty na jądrze gaussowskim jako (Gajek, Kałuszka 2000, s. 98):

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{n \cdot h} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{z - Z_i}{h}\right) \quad (9)$$

dla zadanej szerokości pasma  $h$ , którą ustala się zwykle na poziomie minimalizującym scałkowany błąd średniokwadratowy, tj. na poziomie szacowanym zgodnie z równaniem (Gajek, Kałuszka 2000, s. 99):

$$h = 1,05 \cdot \sigma \cdot n^{-1/5} \quad (10)$$

gdzie  $\sigma$  – odchylenie standardowe zmiennej, które zastępuje się wartością estymatora  $\hat{\sigma}$  oszacowaną na podstawie próby.

Stosowanie estymatora jądrowego bazującego na jądrze gaussowskim do szacowania rozkładu prawdopodobieństwa stopy odzysku może prowadzić do pewnych błędów. Estymator ten może bowiem przyjmować wartości dodatnie dla ujemnych wartości stóp odzysku, a zatem całka z tego estymatora po obszarze określoności  $A$  nie będzie równa jedności. Dlatego w przypadku estymacji rozkładów stóp odzysku konieczne jest zastosowanie estymatora jądrowego określonego na przedziale  $\langle 0, Max \rangle$  lub przynajmniej na  $(0, Max)$ , tj. na przedziale, w którym zawierają się możliwe realizacje zmiennej losowej, jaką jest stopa odzysku. W tej sytuacji pomocny okazuje się estymator oparty na jądrze rozkładu beta, którego sposób budowy opisali między innymi Chen (2000, s. 75) oraz Haggmann, Renault i Scaillet (2005, s. 324–325). Wykazuje się, że dla próby losowej  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  estymator oparty na jądrze rozkładu beta jest określony w następujący sposób:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(Z_i; \frac{z}{h} + 1; \frac{Max - z}{h} + 1; Max\right) \quad (11)$$

Asymetryczne jądro  $K(u, \alpha, \beta, Max)$  estymatora  $\hat{f}$  jest funkcją gęstości rozkładu beta, którą opisuje poniższa formuła:

$$K(u, \alpha, \beta, Max) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{u}{Max}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{u}{Max}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{Max} \quad (12)$$

gdzie  $Max$  oznacza maksymalną wartość, jaką przyjmować może zmienna  $Z$ .

Optymalna szerokość pasma  $h$  wyliczana jest w tym przypadku zgodnie z następującym algorytmem (Haggmann, Renault i Scaillet 2005, s. 329):

$$h = \sigma \cdot n^{-2/5} \quad (13)$$

### 3.4.2. Estymator semiparametryczny

Oprócz klasycznej estymacji jądrowej jako metody nieparametrycznego szacowania rozkładu prawdopodobieństwa Haggmann, Renault i Scaillet (2005, s. 325–326) podają również semiparametryczne rozszerzenie tego podejścia. W skrócie można stwierdzić, że polega ono na estymacji jądrowej rozkładu przekształconych danych wyjściowych, a następnie wykorzystaniu tego estymatora do korekty funkcji gęstości rozkładu beta.

Podstawą do estymacji jest przekształcenie próby,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  w próbę,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  zgodnie z poniższym algorytmem:

$$U_i = F_B(Z_i, \alpha, \beta, Max) \quad (14)$$

gdzie  $F_B(Z_i, \alpha, \beta, Max)$  jest dystrybucją rozkładu beta o parametrach  $\alpha$  i  $\beta$ , określonego na przedziale  $(0; Max)$ .

Wartości estymatorów  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$ , parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ , wyznacza się na podstawie próby losowej,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  za pomocą metody największej wiarygodności lub metody momentów. W drugim przypadku w drodze przekształceń formuł określających wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe rozkładu beta, otrzymujemy:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\mu}}{Max} \cdot \left[ \frac{\hat{\mu} \cdot (Max - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right] \quad (15)$$

$$\hat{\beta} = \left( 1 - \frac{\hat{\mu}}{Max} \right) \left[ \frac{\hat{\mu}(Max - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right] \quad (16)$$

gdzie  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$  to estymatory, odpowiednio, wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennej, których wartości uzyskano na podstawie próby.

Można wykazać, że pomiędzy estymowaną funkcją gęstości  $f$  wyjściowej zmiennej  $Z$  a funkcją gęstości  $r$  przekształconych danych zachodzi następujący związek:

$$f(z) = f_B(z, \alpha, \beta, Max) \cdot r(F_B(z, \alpha, \beta, Max), \alpha, \beta, 1) \quad (17)$$

gdzie:

$f_B(z, \alpha, \beta, Max)$  – funkcja gęstości rozkładu beta o parametrach  $\alpha$  i  $\beta$ , określonego na przedziale  $(0; Max)$ ,  
 $r$  – funkcja gęstości zmiennej  $U = F_B(Z, \alpha, \beta, Max)$ , która jest estymowana za pomocą estymatora jądrowego funkcji beta.

Równanie (17) implikuje, że w celu estymacji funkcji gęstości zmiennej  $Z$  należy zbudować estymator jądrowy zmiennej  $U$  i otrzymaną funkcję przemnożyć przez funkcję gęstości rozkładu beta. Estymator jądrowy zmiennej  $U$  odgrywa więc w tym przy-

padku rolę czynnika korygującego wartości estymatora parametrycznego. Ostateczna postać estymatora semiparametrycznego prezentuje się w związku z tym następująco:

$$\hat{f}(z) = f_B(z, \alpha, \beta, Max) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(U_i; \frac{u}{h} + 1; \frac{(1-u)}{h} + 1; 1\right) \quad (18)$$

Jak stwierdzają Haggmann, Renault i Scaillet (2005, s. 325–328), przewaga estymatora semiparametrycznego nad estymatorem jądrowym rozkładu beta uwidacznia się wówczas, gdy estymowany rozkład choć trochę zbliżony jest do rozkładu beta. Przewaga ta polega głównie na tym, że zwykle scałkowany błąd średniokwadratowy jest mniejszy dla estymatora semiparametrycznego niż dla estymatora jądrowego. Wynika to z faktu, że estymator semiparametryczny opiera się na estymacji jądrowej dla przekształconej zmiennej, której funkcja gęstości jest najczęściej mniej zakrzywiona. Wraz ze zmniejszaniem się stopnia zakrzywienia estymowanej funkcji maleje natomiast błąd średniokwadratowy estymatora jądrowego. Haggmann, Renault i Scaillet (2005) przedstawiają wyniki analizy porównawczej błędów obu estymatorów. Wynika z nich, że nawet gdy próba pochodziła z mieszanki dwóch rozkładów beta, scałkowany błąd średniokwadratowy okazywał się nieco niższy dla estymatora semiparametrycznego.

## 4. Analiza stóp odzysku w warunkach polskich na podstawie danych empirycznych

Zaprezentowane algorytmy generowania stóp odzysku i estymacji rozkładu prawdopodobieństwa zostaną wykorzystane w analizie rzeczywistych danych historycznych w odniesieniu do niewypłacalnych ekspozycji kredytowych. Dzięki budowie nieparametrycznych estymatorów funkcji gęstości możliwe stanie się przedstawienie rozkładów empirycznych na tle funkcji gęstości rozkładu beta i wypowiedzenie się w kwestii ewentualnej zasadności zastępowania estymatorów nieparametrycznych lub semiparametrycznych prostymi estymatorami parametrycznymi.

W analizie empirycznej wykorzystano dane historyczne o niewypłacalnych ekspozycjach kredytowych jednego z większych banków działających w Polsce. Dane te obejmują okres od 31 maja 2004 do 30 czerwca 2006 r. Badaniu poddano cztery przykładowe portfele kredytowe, przy czym portfele te są rozłączne. Wśród portfeli tych wyróżniliśmy:

a) dwa portfele produktowe (oznaczane dalej jako  $G_1$  i  $G_2$ ), wyodrębnione na podstawie rodzaju produktu kredytowego zdefiniowanego przez bank oraz typu klientów, do których dany produkt został skierowany,

**Tabela 1.** Średnie stopy odzysku i odchylenia standardowe stóp odzysku uzyskane podczas symulacji dla poszczególnych portfeli kredytowych

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
Średnia $RR$	0,728	0,316	0,604	0,537
Odchylenie standardowe $RR$	0,358	0,325	0,347	0,360

Źródło: obliczenia własne.

b) dwa portfele branżowe (oznaczane dalej jako  $G_3$  i  $G_4$ ), wyróżnione na podstawie branży, w jakiej funkcjonuje podmiot gospodarczy, będący dłużnikiem banku.

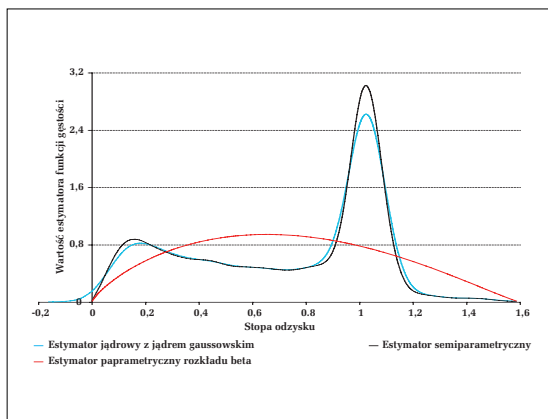
Wyjściowe próby wektorów  $X_i$  dla poszczególnych portfeli, obejmujące zaobserwowane zmiany sytuacji niewypłacalnych ekspozycji, składały się z następującej liczby obserwacji:  $N_{G_1} = 4\,998$ ,  $N_{G_2} = 24\,552$ ,  $N_{G_3} = 32\,938$  oraz  $N_{G_4} = 12\,414$ .

Dla wszystkich portfeli kredytowych wygenerowane zostały próby stóp odzysku według reguł odpowiadających łańcuchom Markowa i algorytmowi przedstawionemu w trzecim rozdziale artykułu. Każ-

dorazowo wykonano  $n = 10\,000$  powtórzeń symulacyjnych, zakładając, że pierwszą nieuwzględnianą klasą ryzyka jest klasa o numerze 61 ( $KL = 61$ ). Dla portfeli produktowych do dyskontowania wykorzystano średnie stopy oprocentowania niewypłacalnych ekspozycji uwzględnionych w próbie  $X_i$ , dla portfeli branżowych zastosowano zaś stopę równą 10%. Podsumowując, stopy użyte do dyskontowania wynoszą odpowiednio:  $r_{G_1} = 10,51\%$ ,  $r_{G_2} = 13,10\%$ ,  $r_{G_3} = 10,00\%$  oraz  $r_{G_4} = 10,00\%$ .

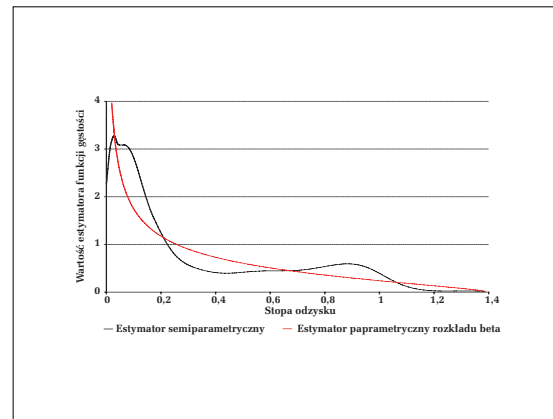
Uzyskane średnie wartości i odchylenia standardowe stóp odzysku ( $RR$ ) zostały przedstawione w tabeli 1. Na uwagę zasługują stosunkowo wysokie war-

**Wykres 1.** Rozkład stopy odzysku w portfelu  $G_1$



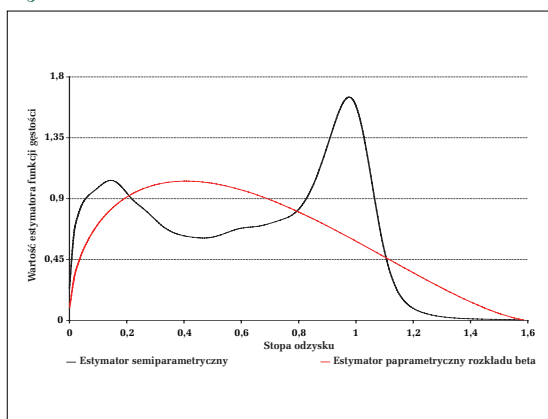
Źródło: obliczenia własne.

**Wykres 2.** Rozkład stopy odzysku w portfelu  $G_2$



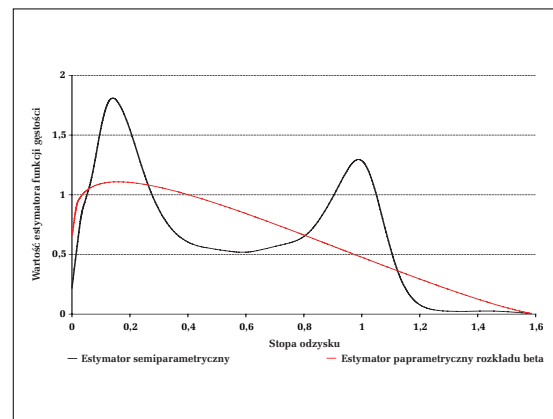
Źródło: obliczenia własne.

**Wykres 3.** Rozkład stopy odzysku w portfelu  $G_3$



Źródło: obliczenia własne.

**Wykres 4.** Rozkład stopy odzysku w portfelu  $G_4$



Źródło: obliczenia własne.

tości odchyłeń standardowych dla stóp odzysku w portfelach. Wartości te są zgodne z wynikami większości badań stóp odzysku, które przeprowadzili inni autorzy na podstawie znacznie pełniejszych informacji. Wartości odchyłeń standardowych rzędu 0,3 czy 0,4 otrzymali między innymi: Friedman i Sandow (2005, s. 356–357), Frye (2000, s. 10–11), Querci (2005, s. 5–8), Carty i Lieberman (1996, s. 8), Araten, Jacobs Jr. i Varshney (2004, s. 30–34), Grunert i Weber (2005, s. 17) oraz Keisman i Van de Castle (1999, s. 30–32). Trudno natomiast porównywać uzyskane przez nas wartości średnich stóp odzysku z rezultatami innych autorów, nie uwzględniając różnic w sposobie definiowania portfeli.

Na podstawie wygenerowanych prób stóp odzysku zbudowaliśmy estymatory funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa stopy odzysku dla poszczególnych portfeli. Każdorazowo wyznaczyliśmy estymator semiparametryczny oraz estymator parametryczny rozkładu beta, którego parametry oszacowaliśmy metodą momentów. Estymatory te przedstawiliśmy na wykresach od 1 do 4. Na osiach odciętych ujęto wartość stopy odzysku, a na osiach rzędnych wartości estymatorów funkcji gęstości dla rozkładu prawdopodobieństwa stopy odzysku w poszczególnych portfelach. Dla portfela  $G_1$  zbudowaliśmy dodatkowo estymator jądrowy oparty na jądrze gaussowskim, aby wykazać, że jego stosowanie nie jest zalecane w przypadku niesymetrycznych rozkładów określonych na podzbiornie zbioru liczb rzeczywistych (por. wykres 1). Z jednej strony bowiem estymator jądrowy opierający się na jądrze gaussowskim zaniża wartości funkcji gęstości dla stóp odzysku większych od zera, a z drugiej strony przyjmuje wartości większe od zera na obszarze, na którym estymowana funkcja nie jest określona ( $RR < 0$ ).

Analiza postaci oszacowanych estymatorów semiparametrycznych przedstawionych na wykresach od 1 do 4 sugeruje, że w odniesieniu do badanych portfeli kredytowych rozkłady stóp odzysku mają charakter bimodalny. Oznacza to, że obserwuje się dwa optima lokalne funkcji gęstości, a stopy odzysku występują z najwyższymi częstościami dla dwóch stosunkowo wąskich przedziałów. Jedna moda pojawia się zwykle dla stóp odzysku w granicach 90–110%, druga zaś w 0–20%. Oznacza to, że w przypadku analizowanych portfeli bank powinien się spodziewać odzyskania albo bardzo dużych, albo bardzo małych kwot w stosunku do wartości należności w momencie powstania niewypłacalności. Otrzymane rezultaty są zgodne z wynikami omówionych w 2. rozdziale badań rozkładu stóp odzysku na innych rynkach. Na uwagę zasługuje zwłaszcza podobieństwo do wyników uzyskanych przez Querci (2005, s. 11–12) oraz Laurent i Schmita (2005, s. 315), a także Dermine i Neto de Carvalho (2005, s. 110) oraz

Aratena, Jacobsa Jr. i Varshneya (2004, s. 31). Autorzy ci estymowali rozkłady stóp odzysku na podstawie danych tylko jednego wierzyciela i w drodze analizy przepływów pieniężnych (a nie na podstawie cen instrumentów na rynku), czyli w sposób podobny do prezentowanego w naszym artykule. Zasadnicza różnica pomiędzy naszym badaniem a badaniami wymienionymi powyżej polega natomiast na tym, że skorzystaliśmy z próby stóp odzysku wygenerowanej na podstawie niepełnej informacji o procesach windykacyjnych, podczas gdy inni autorzy używali danych o rzeczywistych zaobserwowanych stopach odzysku. Pomimo tej istotnej różnicy metodologicznej ostateczne wyniki dociekań okazują się podobne.

Rezultaty tylko częściowo zgodne z uzyskanymi w polskich warunkach przedstawiają natomiast: Schuermann (2005, s. 14–15), Grippa, Iannotti i Leandri (2005, s. 132), a także Hagmann, Renault i Scaillet (2005, s. 334–338). Wyniki analiz tych autorów wskazują wprawdzie, jak pamiętamy, na bimodalność rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku, lecz równocześnie sugerują, że mody pojawiać się mogą w różnych przedziałach określoności rozkładu, tj. niekoniecznie na jego skrajach. Należy jednak zaznaczyć, że badania wspomnianych autorów obejmują znacznie szerszą grupę ekspozycji (dotyczą należności różnych podmiotów), a dodatkowo analizy Schuermanna (2005) oraz Hagmanna, Renaulta i Scaillet (2005) opierają się na pomiarze stóp odzysku na podstawie rynkowych cen niewypłacalnych instrumentów, a nie rzeczywistych zrealizowanych przepływów pieniężnych.

Wyniki badań prezentowane w literaturze przedmiotu wskazują, że w przypadku analizy zdyskontowanych przepływów pieniężnych od niewypłacalnych dłużników tylko jednego wierzyciela istnieje tendencja do pojawiania się w rozkładzie prawdopodobieństwa stóp odzysku bimodalności o pewnej charakterystycznej strukturze. Napotkanym przez nas odstępstwem od tej reguły są jedynie dociekania MacLachlana (2005, s. 301), który przedstawił histogram stóp odzysku charakteryzujący się tylko jedną modą dla stopy odzysku wynoszącej około 90%.

Stopy odzysku większe od jedności występują naszym badaniu z niezerowym prawdopodobieństwem. W przypadku portfeli  $G_1$ ,  $G_3$  i  $G_4$  rozkład został oparty na przedziale od 0 do 160%, a dla portfela  $G_2$  – na przedziale od 0% do 140%. Pojawianie się stóp odzysku przekraczających 100% wynika głównie z faktu, że suma zdyskontowanych spłat obejmuje między innymi odsetki i prowizje, ale odnoszona jest do wartości zadłużenia kapitałowego na moment niewypłacalności. Jak podkreślono wcześniej, obecność stóp odzysku o wartościach powyżej 100% odnotowywana jest również w literaturze przedmiotu. Za ekstremalny przypadek mogą uchodzić badania Laurent



i Schmita (2005, s. 315), w których incydentalnie pojawiają się nawet stopy odzysku przekraczające 400%. Badania te dotyczą jednak należności leasingowych, w przypadku których windykacja często odbywa się poprzez sprzedaż przedmiotu leasingu na rynku, a uzyskane dochody z tego tytułu zaliczane są na poczet leasingodawcy (nawet jeżeli okazują się wyższe od długu leasingobiorcy).

Reasumując, możemy stwierdzić, że cechy rozkładów w analizowanych przez nas portfelach znacznie utrudniają modelowanie stóp odzysku za pomocą parametrycznych estymatorów klasycznych rozkładów, w tym również za pomocą parametrycznego estymatora rozkładu beta. Wynika to głównie z zaobserwowanej bimodalności rozkładów empirycznych, która kontrastuje z własnościami rozkładu beta. Dla rozkładu beta możliwe jest bowiem występowanie tylko jednego optimum lokalnego funkcji gęstości lub ewentualnie pary punktów, w których wartość funkcji gęstości zbiega do  $+\infty$ , przy czym zawsze owe dwa punkty są krańcami przedziału określoności rozkładu. Analiza porównawcza wykresów estymatorów dla poszczególnych portfeli (wykresy 1–4) potwierdza spostrzeżenie, że w przypadku badanych portfeli kredytowych funkcje gęstości wyjściowych rozkładów beta znacznie odbiegają od rzeczywistych rozkładów stóp odzysku, dla których stworzono estymatory semiparametryczne<sup>2</sup>.

Wyniki badań empirycznych wskazują, że stopy odzysku niejednokrotnie mają rozkłady znacznie odbiegające od klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa. W związku z tym należałoby rozważyć zasadność wykorzystywania rozkładu beta do modelowania stóp odzysku, szczególnie w ramach narzędzi do analizy kapitału ekonomicznego i wartości zagrożonej z tytułu ryzyka kredytowego<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Estymatory jądrowe funkcji gęstości rozkładu stóp odzysku zbudowano również na podstawie informacji na temat windykacji w prawie dwukrotnie krótszym okresie (wyników nie umieszczono w artykule). Także w tym przypadku oszacowane rozkłady charakteryzowały się bimodalnością.

<sup>3</sup> Zasadne byłoby podjęcie próby zastąpienia rozkładu beta mieszaną innych rozkładów w taki sposób, aby uzyskać wzór funkcji gęstości dla tego rozkładu. Prezentowane opracowanie skupia się na nieparametrycznej estymacji rozkładu stóp odzysku i jedynie wskazuje na możliwe trudności przy posługiwaniu się klasycznymi estymatorami parametrycznymi. Dlatego też nie będziemy rozwijać kwestii precyzyjnej estymacji parametrycznej.

## 5. Krótkie podsumowanie

W praktyce bankowej, zwłaszcza polskiej, często można się spotkać z sytuacją, w której posiadane informacje na temat odzysków niewypłacalnych ekspozycji kredytowych nie obejmują całej historii poszczególnych ekspozycji, ponieważ sam proces windykacji rozciągnięty jest na dłuższy okres. W tych warunkach wyznaczenie średniej stopy odzysku i rozkładu stopy odzysku na podstawie bezpośrednio zaobserwowanych stóp odzysku jest utrudnione lub obciążone dość dużym błędem ze względu na stosunkowo małą liczebność próby, na której bazowałaby taka estymacja. Dlatego w prezentowanym artykule zaproponowaliśmy algorytm opierający się na krótkich szeregach czasowych i założeniach procesów Markowa. Staraliśmy się wykazać, że podejście to może być podstawą nie tylko wyznaczenia wartości oczekiwanej stopy odzysku, która jest absolutnym minimum w badaniach nad odzyskami niewypłacalnych ekspozycji kredytowych. Opisana technika, w połączeniu z estymacją jądrową lub estymacją semiparametryczną, może również służyć do szacowania postaci rozkładu prawdopodobieństwa stóp odzysku, tj. funkcji gęstości.

Wyniki zastosowania przedstawionych algorytmów do badania zwindykowanych kwot z ekspozycji kredytowych banku działającego w Polsce sugerują, że przynajmniej w części przypadków rozkład prawdopodobieństwa stóp odzysku może mieć charakter bimodalny. Wartość zwindykowanych kwot w stosunku do wartości zadłużenia w momencie niewypłacalności jest wtedy stosunkowo duża bądź stosunkowo mała. Dodatkową cechą zaobserwowanych rozkładów jest ponadto niezerowe prawdopodobieństwo występowania stóp odzysku powyżej 100%. Dla analizowanych przez nas portfeli kredytowych rozkłady stóp odzysku różnią się zatem od rozkładów beta. Wydaje się więc, że modelowanie stóp odzysku z wykorzystaniem teoretycznych rozkładów beta jako estymatorów parametrycznych, może prowadzić do błędów. Bimodalność zaobserwowanych rozkładów sprawia, że dalsze badania nad stopami odzysku powinny zmierzać w kierunku zastąpienia estymatora parametrycznego rozkładu innym estymatorem parametrycznym, opisującym mieszaną dwóch różnych rozkładów.

## Bibliografia

- Altman E.I., Resti A., Sironi A. (2005), *Loss Given Default: A Review of the Literature*, w: E.I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Araten M., Jacobs Jr. M., Varshney P. (2004), *Measuring LGD on Commercial Loans: An 18-Year Internal Study*, "The RMA Journal", May, s.28–35 (<http://michaeljacobsjr.com>).
- Asarnow E., Edwards D. (1995), *Measuring Loss on Defaulted Bank Loans: a 24-Year Study*, "The Journal of Commercial Lending", Vol. 77, No. 7, s.11–23.
- Basel Committee on Banking Supervision (2004), *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework*, June, Basle.
- Bosworth E., Eales R. (1998), *Severity of Loss in the Event of Default in Small Business and Large Consumer Loans*, "The Journal of Lending and Credit Risk Management", May, s. 58–65.
- Carty L.V., Gates D., Gupton G.M., (1996), *Bank Loan Loss Given Default*, "Moody's Investors Service – Global Credit Research", November, <http://www.moodyskmv.com>.
- Carty L.V., Lieberman D. (1996), *Defaulted Bank Loan Recoveries*, "Moody's Investors Service – Global Credit Research", November, <http://www.moodyskmv.com>.
- Chabaane E., Laurent J.P., Salomon J. (2005), *Credit Risk Assessment and Stochastic LGD: An Investigation of Correlation Effects*, w: E. I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Chen S.X. (2000), *Beta Kernel Smothers for Regression Curves*, "Statistica Sinica", No. 10, s.73–91, <http://www3.stat.sinica.edu.tw>.
- Dermine J., Neto de Carvalho C. (2005), *How to Measure Recoveries and Provisions on Bank Lending: Methodology and Empirical Evidence*, w: E. I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Felsovalyi A., Hurt L. (1998), *Measuring Loss on Latin American Defaulted Bank Loans: A 27-Year Study of 27 Countries*, "The Journal of Lending and Credit Risk Management", Vol. 81, No. 2, s. 41–46.
- Friedman C., Sandow S. (2005), *Estimating Probability Distributions of Recovery Rates: A Utility-Based Approach*, w: E.I.Altman, A.Resti, A.Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London 2005.
- Frye J. (2000), *Depressing Recoveries*, "Emerging Issues Series", *Federal Reserve Bank of Chicago*, October, <http://www.chicagofed.org>.
- Gajek L., Kałuszka M. (2000), *Wnioskowanie statystyczne: modele i metody*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Grippa P., Iannotti S., Leandri F. (2005), *Recovery Rates in the Banking Industry: Stylised Facts Emerging from the Italian Experience*, w: E.I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Grunert J., Weber M. (2005), *Recovery Rates of Bank Loans: Empirical Evidence for Germany*, <http://medici.bwl.uni-mannheim.de>
- Hagmann M., Renault O., Scaillet O. (2005), *Estimation of Recovery Rate Densities: Non-parametric and Semi-parametric Approaches versus Industry Practice*, w: E.I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Hu Y.T., Perraudin W. (2002), *The Dependence of Recovery Rates and Defaults*, February, <http://www3.imperial.ac.uk>
- Jakubowski J., Sztencel R. (2004), *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa.
- Keisman D., Van de Castle K. (1999), *Recovering Your Money: Insights Into Losses From Defaults*, "Standard & Poor's CreditWeek", July 16, <http://www.qf.nthu.edu.tw>
- Laurent M.P., Schmit M. (2005), *Estimating Distressed LGD on Defaulted Exposures: A Portfolio Model Applied to Leasing Contracts*, w: E. I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Maclachlan I. (2005), *Choosing the Discount Factor for Estimating Economic LGD*, w: E. I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.
- Querci F. (2005), *Loss Given Default on a Medium-Sized Italian Bank's Loans: An Empirical Exercise*, January, <http://www.efmaefm.org>.
- Rajagopalan B., Lall U. (1999), *A k-Nearest-Neighbor Simulator For Daily Precipitation and Other Weather Variables*, "Water Resources Research", Vol. 35, No. 10, s. 3089–3101, <http://bechtel.colorado.edu/~balajir>
- Schuermann T. (2005), *What Do We Know About Loss Given Default?*, w: E. I. Altman, A. Resti, A. Sironi (red.), *Recovery Risk: The Next Challenge in Credit Risk Management*, Riskbooks, London.