Niepewność modelu w polityce makroekonomicznej.
Zasada odporności
Część I*

*Bohdan Kłos***

W niniejszym opracowaniu podjęto próbę dokonania przeglądu zagadnień związanych z niepewnością w polityce gospodarczej, głównie monetarnej. Przy zaakcentowaniu krytycznej roli niepewności paradygmatu (niepewności modelu) w procesach decyzyjnych analizowane są możliwości i metody przygotowywania decyzji w taki sposób, aby wypracowana polityka mogła mieć efekt kompensujący. Zwraca się uwagę na relatywnie nową na gruncie teorii ekonomii (ale intensywnie rozwijaną w naukach technicznych – jako optymalne i odporne sterowanie[1]) ideę odporności. Elementy odpornego sterowania – po zebraniu doświadczeń oraz wbudowaniu w procedury przygotowywania decyzji funkcjonujące w instytucjach prowadzących politykę – mogą ograniczyć konsekwencje niepewności modelu.

Opracowanie składa się z dwóch części. Pierwsza poświęcona jest różnym aspektom niepewności oraz sposobom jej absorpcji spotykanym w literaturze. Są to propozycje dobrze umotywowane z teoretycznego punktu widzenia, ale abstrahujące od instytucjonalnych uwarunkowań, w jakich przygotowuje się decyzje makroekonomiczne. Niemniej jednak jest to oferta dla praktyków, jeśli nie na dziś, to na najbliższe lata. W drugiej części podejmowana jest próba przeanalizowania praktycznych sposobów rozwiązywania problemu niepewności. Z uwagi na ograniczone źródła w większym stopniu jest to jednak opis stylizowanych przypadków niż charakterystyka pozwalająca na wyciąganie ogólniejszych wniosków.

1. Ujęcie akademickie

Dla wprowadzenia w zagadnienie sięgamy po typowy model polityki gospodarczej (MPG), składający się z ekstremizowanej[2] funkcji kryterium (KE) oraz modelu gospodarki (MG). Modele polityki o takiej strukturze spotykane są w wielu pracach, głównie nurtu akademickiego. Dlatego – dla zwięzłości – omawiane w tej części tekstu ujęcie nazywane będzie akademickim opisem problemu decyzyjnego albo polityki gospodarczej. Strukturę modelu polityki gospodarczej można przedstawić jako:

$$(\text{MPG})\begin{cases} (\text{KE})\quad \underset{\text{instrumenty\_polityki}}{\text{ekstremum}} \left\{ \sum_{czas} dyskonto \left[\text{Funkcja\_celu} \left(\begin{array}{l} cele\_polityki, \\ zmienne\_celu, \\ instrumenty\_polityki, \\ wagi\_celów, \\ \ldots \end{array} \right) \right] \right\} \\ (\text{MG})\quad \begin{bmatrix} zmienne\_celu \\ zmienne\_modelu \end{bmatrix} = \text{Model\_gospodarki} \left(\begin{array}{l} instrumenty\_polityki, \\ zmienne\_modelu, \\ parametry\_modelu, \\ \ldots \end{array} \right) \end{cases}$$

* Drugą część artykułu opublikujemy w nr. 11-12/2004 „Banku i Kredytu".

** Adres do korespondencji: Bohdan.Klos@mail.nbp.pl. Niniejsze opracowanie zawiera wyłącznie osobiste poglądy autora, a nie instytucji lub osób, z którymi autor współpracuje lub współpracował.

[1] Część autorów używa terminologii: *Classical Control*, *Modern Control*, *Post-Modern Control*. Ostatnie określenie odnosi się do nurtu badań nazywanego tu odpornym sterowaniem. Por. Zhou i in. (1996).

[2] Spotykany w literaturze anglosaskiej termin **ekstremizacja** oznacza jednoczesną maksymalizację i minimalizację. W niniejszym opracowaniu mianem ekstremizacji określa się poszukiwanie zarówno pojedynczego ekstremum (minimum lub maksimum), jak i podwójnego (jednoczesne minimum i maksimum).

MPG obejmuje dwa zagadnienia. Pierwszym jest wypracowanie przesłanek decyzji, tzn. konstrukcja modelu gospodarki MG opisującego związki między instrumentami polityki gospodarczej a zmiennymi będącymi jej celem. Model gospodarki wykorzystuje się do prognozowania oraz badania skutków zmian instrumentów. MG reprezentuje zatem zagadnienia będące przedmiotem makro- i mikroekonomii oraz ekonometrii, statystyki matematycznej, statystyki ekonomicznej. Drugie zagadnienie – wybranie sekwencji najlepszych decyzji – opiera się na KE, w którym dokonuje się pomiaru odchyleń zmiennych od ich wartości pożądanych, ważenia odchyleń oraz wartościuje, tzn. określa się syntetyczną ocenę polityki. Ten aspekt zagadnienia jest przedmiotem zainteresowania wielu działów nauki, ale nas będą interesować jedynie odwołania do teorii decyzji. Istotą akademickiego ujęcia MPG jest integracja obu zagadnień.

Z matematycznego punktu widzenia MPG jest zadaniem dynamicznej optymalizacji, a jego rozwiązanie może przybierać postać formuły jawnie definiującej związki optymalnych wartości instrumentów z tymi zmiennymi modelu, które są celami polityki, np.:

$$(\mathrm{SL})\quad instrumenty\_polityki = \mathrm{Regula\_polityki}\begin{pmatrix} cele\_polityki, \\ zmienne\_celu, \\ \ldots \end{pmatrix}$$

albo ciągu wartości instrumentów bez analitycznie określonej relacji z innymi elementami MPG[3]. Rozwiązanie MPG, jako propozycja najlepszej z punktu widzenia KE polityki, czyni ostateczną decyzję niemal formalnością, zwłaszcza, gdy ma postać reguły o składowych interpretowalnych w kategoriach przyczynowo-skutkowych.

Należy jednak podkreślić, że źródłem wiedzy o skutkach podejmowanych decyzji jest model gospodarki – proponowana polityka dotyczy więc modelu, a gospodarki jedynie w tym zakresie, w jakim model jest jej adekwatną charakterystyką. Optymalne rozwiązanie MPG eksploatuje cechy MG, które nie zawsze znajdują odpowiednik w gospodarce. Świadomość tego faktu, ale i dynamiczny charakter MG oraz KE (prognozowanie wartości zmiennych) prowokują do nieortodoksyjnego rozwiązania problemu matematycznego. Przykładowo, eliminuje się możliwość uzyskania ciągu wartości instrumentów, narzucając postać funkcyjną rozwiązania. Szczególnie wygodne wydają się funkcje liniowe SL, wiążące instrumenty polityki ze zmiennymi pojawiającymi się w funkcji celu – w literaturze nazywa się je **regułami prostymi**. W dalszej części pracy reguły, w których optymalizowano jedynie parametry narzucając postać analityczną rozwiązania, będziemy nazywali **regułami efektywnymi**. Oprócz reguł motywowanych MPG przedmiotem badań są także reguły proste o arbitralnie przyjmowanych parametrach oraz reguły, które powstają bez odwołania do MPG (wskazywania postaci KE oraz modelu gospodarki)[4].

Ważnym przedmiotem dyskusji akademickich jest zatem konstrukcja reguł typu SL, tzn. przynajmniej częściowa endogenizacja samej polityki. To jest tak, jakby przedmiotem wyboru decydenta były nie tyle wartości instrumentów, ile wartości parametrów reguły lub same reguły. Po taki schemat analizy polityki gospodarczej często sięga się w akademickich dyskusjach o polityce monetarnej i w toku dalszych rozważań będziemy się opierać niemal wyłącznie na przykładach z tej dziedziny. Oczywiście, nie ma powodu, by z góry wykluczać politykę fiskalną z naszkicowanego schematu, ale dotychczasowy dorobek teoretyczny nie jest zbyt obfity. Prezentowane dalej idee – mimo jednostronnych przykładów – mają więc zastosowanie do całej polityki makroekonomicznej.

1.1. Ujęcia cząstkowe – niepewność składowych modelu

Wątpliwości, czy modele gospodarki są na tyle precyzyjne, by zaufać polityce uzyskanej z rozwiązania MPG pojawiają się od dawna. Efektem tych wątpliwości są badania – tu nazywane cząstkowymi – nad źródłami niepewności w modelu i ich konsekwencjami dla ostatecznej decyzji. W tym nurcie badań niepewność jest utożsamiana z losowością, której natura wynika z założeń upraszczających analizę. Rozwiązując MPG, poszukuje się polityki (reguły), która uwzględnia stochastyczny charakter elementów modelu. Przedstawimy krótki przegląd najważniejszych wniosków, traktując ten wątek rozważań jako wprowadzenie do bardziej kompleksowego ujęcia problematyki.

1.1.1. Niepewność zaburzenia

W zagadnieniach z liniowym modelem gospodarki i kwadratową funkcją celu często zakłada się istnienie w MG niepewności reprezentowanej przez addytywny i nieskorelowany składnik losowy (tzw. **addytywna niepewność zaburzenia**). Stochastyczny charakter MG wymaga modyfikacji kryterium KE. Zwykle minimalizowana jest więc oczekiwana (warunkowa) kwadratowa funkcja straty. Taki MPG zalicza się

[3] Jeśli w MG występują oczekiwania kierowane w przyszłość (antycypacyjne), to rozwiązania MPG powinny być uzyskiwane w sposób typowy dla gier dynamicznych, tzn. przy założeniu, że optymalna polityka będzie wiarygodna lub nie będzie miała takiej cechy. Formalne procedury postępowania są wówczas różne. W dalszej części pracy, dopuszczając możliwość pojawienia się racjonalnych i antycypacyjnych oczekiwań w MG, założymy pełną wiarygodność decydenta. Sygnalizowany problem jest konsekwencją bardziej fundamentalnej dyskusji na temat polityki makroekonomicznej opartej na regułach oraz polityki dyskrecjonalnej. Por. Kydland i in. (1977), Fisher (1992), Meyer (2002).

[4] W literaturze dotyczącej polityki monetarnej oprócz reguł normatywnych poszukuje się także reguł opisowych. Szacuje się np. równanie, uzależniające stopę procentową od zmiennych uznanych za przesłanki w procesie decyzyjnym, aby odkryć zasady postępowania banku centralnego w przeszłości. Por. np. Clarida i in. (1998). Ćwiczenie takie wykonywane jest często, mimo że istnieją argumenty kwestionujące jego sens. – por. S. G. Hall i in. (1999). Reguły o opisowym charakterze będziemy nazywać **regułami empirycznymi** lub **funkcjami reakcji decydenta.**

do klasy kwadratowo-liniowych, bayesowskich problemów decyzyjnych. Dla takich MPG zachodzi zasada równoważności warunkom pewności (ang. *certainty equivalence principle*). Istotę zasady ilustruje następujący MPG:

$$(\mathrm{KL})\begin{cases}\min\limits_{\{u\}} E_0 \sum\limits_t \left(x_t' Q x_t + u_t' R u_t\right)\\ x_{t+1} = A x_t + B u_t + C\varepsilon_{t+1}\ ,\\ \varepsilon_{t+1} \sim IID(0, I)\end{cases}$$

gdzie: macierze wag Q i R charakteryzują, odpowiednio, względne straty decydenta wynikające z odchylenia wektora zmiennych x od ich wartości pożądanych (tu zera) oraz zmian wektora instrumentów u; zebrane w macierz A parametry charakteryzują efekty inercyjne, a w macierz B – wpływ instrumentów u na zmienne x; macierz C definiuje kowariancję zaburzenia losowego ε[5]. Optymalnym rozwiązaniem KL jest liniowa funkcja zmiennych x, tzn.:

$$u_t = F x_t,$$

gdzie: F – macierz parametrów[6] i F nie zmienia się, gdy $C \equiv 0$. Polityka wyznaczona z wersji deterministycznej MPG oraz z wersji z niepewnością zaburzenia są tożsame. Pojawienie się addytywnej niepewności zaburzenia w modelu gospodarki nie wymaga modyfikacji samej polityki, ale sprawia, że jej efekty są – średnio rzecz biorąc – gorsze[7].

Zasada równoważności ujawnia się jedynie w stosunku do polityki optymalnej w zadaniu klasy KL. Jeśli wyznaczona reguła jest jedynie efektywna, to istnienie addytywnej niepewności nie może być pominięte. Zasada równoważności traci swoją aktualność także wtedy, gdy składnik losowy ε wykazuje autokorelację. Odstąpienie od wygodnego analitycznie założenia o niezależności rozkładu ε otwiera pole do analiz natury zaburzenia, jego uporczywości, ale potrzeba brania pod uwagę tego przypadku dostrzegana jest od niedawna[8].

1.1.2. Multiplikatywna niepewność parametrów

Istnienie addytywnego losowego zaburzenia ε w modelu MG jest – z analitycznego punktu widzenia – względnie prostym przypadkiem. Do większych komplikacji prowadzi uznanie parametrów modelu za losowe. W literaturze przypadek taki nazywany jest **multiplikatywną niepewnością parametrów**. Słynna zasada konserwatyzmu sformułowana przez Brainarda (1967) odnosi się do sytuacji, gdy niepewne w modelu są parametry charakteryzujące bezpośredni wpływ instrumentów na zmienne modelu (w zadaniu KL wartości B są losowe). Zasada sprowadza się do spostrzeżenia, że wzrost wariancji (niepewności) parametrów B prowadzi do zmniejszenia absolutnej wartości parametrów reguły F. Przy mniejszych wartościach bezwzględnych F reakcje instrumentu (stopy procentowej) na pojawiające się zaburzenia stają się słabsze niż w warunkach braku niepewności. Zasada Brainarda proponuje optymalną politykę, która uwzględnia fakt nieprecyzyjnej wiedzy o części parametrów modelu. Gdy jednak niepewność dotyczy parametrów charakteryzujących w modelu MG efekty inercyjne (tzn. gdy parametry A w zadaniu KL są losowe) , „optymalna" polityka może stanowić przeciwieństwo propozycji Brainarda[9]. Jeśli występuje jednocześnie niepewność parametrów A i B, tym bardziej nie można wyprowadzić ogólniejszych wniosków.

1.1.3. Niepewność danych

Oprócz addytywnej niepewności zaburzenia oraz multiplikatywnej niepewności parametrów badano także konsekwencje niepewności danych[10]. Zaproponowana powyżej postać zadania KL ignoruje fakt, że dane o gospodarce (zmienne x) dotyczące chwili t w praktyce nie są jeszcze w chwili t znane i trzeba je zastąpić szacunkami. Choćby z tego powodu dane są obarczone niepewnością. Dodatkowo, istnieje też grupa zmiennych, których kwantyfikacja jest dyskusyjna. Luka popytowa, naturalna stopa bezrobocia, NAIRU (itp.) są pojęciami chętnie wykorzystywanymi w analizach teoretycznych i badaniach empirycznych, ale ich treść i sposób pomiaru jest dyskusyjny. Wątpliwość, czy – z uwagi choćby na niejednoznaczność definicji – nie byłoby bezpieczniejsze całkowite pominięcie tej grupy zmiennych w problemach decyzyjnych, okazała się jednak nieuzasadniona. W przypadkach przebadanych np. przez Orphanidesa (1998) oraz Estrella i in. (1999) – gdy losowe są tylko wybrane typy danych (luka popytowa, NAIRU) – ujawniło się zjawisko analogiczne do zasady konserwatyzmu Brainarda.

1.2. Ujęcie kompleksowe – niepewność modelu

Większość zacytowanych wniosków uzyskiwano analitycznie dla bardzo prostych modeli MG, tzn. mode-

[5] W dalszej części pracy pomijamy formalne aspekty problemów matematycznych, np. warunki, jakie muszą spełniać macierze B, A, Q i R, aby istniało jednoznaczne rozwiązanie zadania optymalizacji dynamicznej. Systematyczny wykład prezentuje np. Ljungqvist i in. (2000).

[6] W dalszej części opracowania F oznaczać będzie zarówno samą regułę, jak i jej parametry.

[7] Formalny dowód istnienia równoważności podaje np. Ljungqvist i in. (2000), rozdz. 5.

[8] Por. Srour (2002), Walsh (2003).

[9] Agresywność polityki przy niepewnej dynamice jest najczęściej spotykanym wnioskiem; w paragrafie 1.4.1 (tabela 2) przedstawiany jest przykład MPG, w którym niepewność dynamiki nie przekłada się ani na konserwatywne, ani agresywne reakcje instrumentu.

[10] Por. Orphanides (1998), Estrella i in. (1999). Szerszy przegląd prezentuje Walsh (2003).

li, które nie opisują realnie istniejącej gospodarki[11]. Jeśli modele były bardziej skomplikowane (w szczególności gdy były to modele empiryczne), sięgano po techniki symulacji i metody numeryczne, co tym bardziej ograniczało wnioski jedynie do przebadanego wariantu[12]. Cząstkowe badania wiążące niepewność z poszczególnymi elementami modelu nie obejmują jednak wszystkiego, co wydaje się tu interesujące. Jeśli niepewne mogą być parametry i dane, to równie dobrze można zakwestionować cały model, który – z definicji – jest tylko uproszczonym obrazem wybranych cech rzeczywistości. Dlatego szerzej rozumiana niepewność – **niepewność modelu, paradygmatu** – wydaje się interesująca.

Termin **niepewność modelu** obejmuje coś więcej niż parametry i dane. Przykładowo, można budować modele opierając się na konkurencyjnych (wykluczających) paradygmatach ekonomii. Dla tego samego paradygmatu proponuje się różne (niezagnieżdżone) sposoby matematycznego sformułowania i różne sposoby przeprowadzenia badania statystycznego. Przy tym samym paradygmacie oraz sposobie wpisania teorii w estymowany (kalibrowany) model pozostają wątpliwości dotyczące np. sposobu modelowania procesów dostosowań, rozkładów opóźnień. Nawet wtedy, gdy posługujemy się narzędziami sformalizowanymi rygorystycznie pozostaje przestrzeń do rozstrzygnięć motywowanych doświadczeniem lub przekonaniami badacza. Warto podkreślić, że sens terminu **paradygmat** nie jest ograniczany jedynie do teorii ekonomicznych wyjaśniających przyczynowo-skutkową strukturę (paradygmat *sensu stricto*). Dylemat: modele strukturalne kontra modele astrukturalne (VAR), modele estymowane czy kalibrowane, to także składnik niepewności modelu. Używając terminu **niepewność modelu** (*paradygmatu*), podkreślamy istnienie wątpliwości, które nie mogą być przypisane do konkretnego elementu modelu.

1.2.1. Niepewność paradygmatu – przykład zadania KL

O potrzebie zajęcia się niepewnością modelu świadczy przebieg dyskusji na temat polityki monetarnej w Polsce, w której, naszym zdaniem, nadmierną wagę przywiązywano w niej do preferencji decydenta (wskazując ustawowe definicje celu polityki monetarnej), pomijając rolę modelu (wyników empirycznych badań nad źródłami inflacji w Polsce). Taki sposób argumentacji nie trafiał jednak w sedno zagadnienia. Ilustruje to analiza rozwiązania MPG, w którym decydent minimalizuje średnią ważoną wariancji odchyleń inflacji od założonego celu ($\pi_t - \pi^*$) oraz poziomu aktywności gospodarczej (luki popytowej y_t). Wagę przykładaną do każdego z celów określa parametr λ. Zależności między instrumentem polityki monetarnej u_t oraz inflacją i poziomem aktywności gospodarczej charakteryzuje model gospodarki składający się z krzywej Phillipsa oraz krzywej IS. Pomijamy tu prezentowane wcześniej cząstkowe ujęcia niepewności (parametrów, danych, zaburzenia), nie ma także kosztów zmian instrumentu[13]:

$$(\mathrm{MO})\ \begin{cases} \lambda\ \mathrm{Var}\left(\pi_t - \pi^*\right) + \left(1-\lambda\right)\ \mathrm{Var}\left(y_t\right) \to \min\limits_u \\ \pi_t = \pi_{t-1} + \alpha\, y_{t-1} \\ y_t = \rho\, y_{t-1} - \xi\left(u_{t-1} - u^*\right), \\ \alpha, \rho, \xi > 0,\ \ \lambda \in \left(0,1\right) \end{cases}$$

Optymalnym rozwiązaniem problemu decyzyjnego MO jest liniowa reguła uzależniająca różnice między stopą procentową i jej wartością w warunkach równowagi (u^*) od zmiennych występujących w minimalizowanej funkcji straty:

$$(\mathrm{TR})\ \begin{cases} \left(u_t - u^*\right) = f^{\pi}\left(\pi_t - \pi^*\right) + f^{y} y_t, \\ f^{\pi} = \dfrac{-\alpha\lambda + \sqrt{4\left(1-\lambda\right)\lambda + \left(\alpha\lambda\right)^2}}{2\left(1-\lambda\right)\xi}, \\ f^{y} = \dfrac{\rho}{\xi} \end{cases}$$

Analizując MO i TR zauważamy, że wzrost λ prowadzi do przykładania coraz mniejszej wagi do utrzymania poziomu aktywności gospodarczej. Jednak nawet wtedy, gdy waga zmiennej y w funkcji starty zbiega do zera ($\lambda \to 1$), zmienna ta pozostaje aktywnym elementem reguły TR, a więc nadal jest przesłanką racjonalnych decyzji. Rola luki w procesie decyzyjnym wynika z założonej postaci modelu gospodarki.

Spotykana w literaturze tendencja do analiz reguły w oderwaniu od modelu gospodarki, a nawet utożsamiania parametrów (f^{π}, f^{y}) z preferencjami (λ) prowadzi do nadmiernych uproszczeń analizy[14]. Jeśli np. kwestionowana jest polityka stopy procentowej zbyt słabo (mocno) reagująca na wielkość luki popytowej, to argumenty odwołujące się wyłącznie do preferencji (λ) są wątpliwe – w TR parametr f^{y} nie zależy od λ. Fakt, że luka determinuje optymalną politykę stopy procentowej, wynika z paradygmatu modelu – istotą sporu jest także model.

1.2.2. Metodologiczne aspekty niepewności modelu

W kontekście niepewności modelu ważnym zagadnieniem staje się metoda modelowania. W ekonomii istnieje wiele konkurencyjnych paradygmatów, a prowadzone badania empiryczne nie pozwoliły na sformułowanie odpowiedzi na pytanie, która z idei (teorii) najlepiej tłumaczy to, co się dzieje w naszym otoczeniu.

11 Zasadność części wniosków czytelnik może zweryfikować analizując tabelę 2, w której zebrano postaci optymalnych reguł polityki monetarnej w warunkach niepewności przypisanej do różnych komponentów prostego modelu gospodarki.

12 Obszerniejszy przegląd badań przestawiają np. Kłos (2003), Walsh (2003).

13 Model i jego rozwiązanie cytujemy za Orphanides (1998).

14 Por. np. Czyżewska (2001); przykłady takiej interpretacji podaje także Wojtyna (2003).

Tabela 1 *Klasyfikacja modeli i ich charakterystyki*

Cecha modelu	Modele teoretyczne: modele „czysto” teoretyczne	Modele teoretyczne: stosowane modele teoretyczne	modele hybrydowe	Modele empiryczne: stosowane modele empiryczne	Modele empiryczne: modele „czysto” empiryczne
Związki z obserwowalną rzeczywistością	Orientacja na stylizowane fakty lub całkowite pomijanie obserwowalnych obiektów, zdarzeń oraz ich horyzontu czasowego.	Orientacja na stylizowane fakty.	Próby łączenia informacji zaczerpniętych z próby ze stylizowanymi faktami i wiedzą *a priori*.	Dominującą rola materiału statystycznego często w ramach przyjętego wzorca zależności (modelu teoretycznego).	Zasadniczym (ale nie jedynym) źródłem informacji jest materiał empiryczny.
Rola i charakter wiedzy *a priori*	Cechy modelu są wnioskami wyprowadzanymi w sposób ścisły z założeń (aksjomatów).	Cechy modelu są determinowane założeniami (aksjomatami).	Cechy modelu wynikają – przynajmniej częściowo – z nałożonych i nieweryfikowanych ograniczeń oraz założeń.	Restrykcje identyfikujące parametry podlegają (przynajmniej częściowej) weryfikacji. Endogo- i egzogeniczność zmiennych mogą być testowane.	Próbuje się zminimalizować wpływ założeń *a priori* na cechy modelu. Nakładane ograniczenia są bezpośrednio lub pośrednio weryfikowane.
Sposób uzyskania wartości parametrów modelu	Arbitralnie założone znaki parametrów (wartości minimalne lub (i) maksymalne), nie podlegają weryfikacji.	Kalibracja (narzucone wartości parametrów, dobrane metodami eksperymentalnymi, zaczerpnięte z innych badań itp.)	Część parametrów ma kalibrowane wartości, pozostałe są estymowane warunkowo, także metodami bayesowskimi.	Większość parametrów jest estymowana. Część parametrów podlega restrykcjom.	Wszystkie parametry są estymowane.
Diagnostyka modelu	Formalna analiza poprawności wnioskowania (np. zastosowania twierdzeń i faktów analizy matematycznej, reguł logiki formalnej).	Formalna analiza poprawności wnioskowania.	Dla podzbioru estymowanych parametrów stosuje się takie metody, jak dla modeli empirycznych. Badanie zgodności z danymi.	Metody statystyczne (formalna diagnostyka, w tym zgodność z danymi), interpretacja ekonomiczna (stosowana do parametrów postaci strukturalnej).	Metody statystyczne (formalna diagnostyka, w tym zgodność z danymi), interpretacja ekonomiczna (stosowana do parametrów postaci strukturalnej).
Sposób uwiarygodnienia modelu	Ewentualne badanie zgodności wniosków z przyjętym paradygmatem.	Ćwiczenia numeryczne potwierdzające zdolność modelu do odtwarzania stylizowanych faktów.	Interpretacja ekonomiczna postaci strukturalnej i końcowej, prognozy *ex ante* i *ex post*, analizy mnożnikowe.	Interpretacja ekonomiczna postaci strukturalnej i końcowej, prognozy *ex ante* i *ex post*, analizy mnożnikowe.	Interpretacja ekonomiczna
Typowe zastosowanie	Rozwój teorii ekonomii.	Rozwój teorii ekonomii (ilustracja działania wersji „czysto” teoretycznej), wnioski o charakterze jakościowym wspomagają politykę gospodarczą.	Wspomaganie polityki gospodarczej (prognozy, scenariusze, analizy polityki gospodarczej).	Weryfikacja teorii ekonomicznych, wspomaganie polityki gospodarczej, analizy kontrfaktualne, źródło stylizowanych faktów.	Opis obiektu, weryfikacja teorii ekonomicznych, źródło stylizowanych faktów. Kryterium wyboru dla konkurencyjnych modeli teoretycznych.
Kryteria klasyfikujące metodyki modelowania Kima i Pagana[1]	Zależą od przyjętych założeń (aksjomatów) modelu.	Zwykle istnieje rozwiązanie stacjonarne; dynamika modelu wynika z optymalizacji dynamicznej. Zakłada się pełny dostęp do informacji, a zmienne egzogeniczne są procesami stochastycznymi.	Zależą od przyjętych założeń. Zwykle istnieje rozwiązanie stacjonarne. Oczekiwania są zgodne z modelem, dynamika estymowana (może wynikać z przyjętego paradygmatu).	Rozwiązanie długookresowe określają dane. Oczekiwania zależne od założeń (częściowo determinowane danymi). Dynamika modelu estymowana, zmienne egzogeniczne warunkowe lub procesy.	Rozwiązanie długookresowe określają dane (jeśli istnieją). Oczekiwania są determinowane przeszłością. Dynamika modelu estymowana. Zmienne egzogeniczne mogą być procesem autoregresyjnym.
Przykłady	Modele z podręczników makro i mikroekonomii: Solowa, Diamonda, Ramsey'a, równowagi ogólnej, itp.	Wyniki badań empirycznych motywowanych modelami „czysto” teoretycznymi. Część dynamicznych modeli stochastycznej równowagi ogólnej, QUEST	Większość modeli stosowanych w instytucjach państwowych i komercyjnych. Interlink, Multimod, NiGEM, AWM, BOF-5, QPM, MANAGE, MBA, MSMI itp.	Modele VAR z analizą funkcji reakcji[2], SVAR, klasyczne modele ekonometryczne (strukturalne i postaci zredukowanej).	Modele VAR (bez analizy funkcji reakcji)[2]

Tabela 1 cd *Klasyfikacja modeli i ich charakterystyki*

Uwagi	Zagwarantowana wewnętrzna spójność i zgodność z paradygmatem (definiuje paradygmat). Możliwa niezgodność z otaczającą rzeczywistością (w obserwowalnym horyzoncie).	Stosowane testy formalne mają jedynie warunkowy charakter (są miarodajne tylko, gdy elementy narzucone są trafne). Z formalnego punktu widzenia można je uznać za niepoprawne.	Obraz „rzeczywistej" gospodarki często bez próby wyjaśnienia. Możliwe sprzeczności z teorią. Ograniczone możliwości stosowania przy wspomaganiu polityki gospodarczej.

[1] Kim i Pagan (1995) proponują następujące kryteria klasyfikacji modeli: (a) istnienie rozwiązania stacjonarnego, (b) zakres informacji dostępnych dla podmiotów, (c) źródło dynamiki modelu, (d) natura zmiennych egzogenicznych.

[2] Przyjęcie kolejności równań w modelu VAR oraz generowanie zaburzeń z dekompozycją Cholesky'ego są nieweryfikowalnymi restrykcjami, które zwykle mają wpływ na uzyskiwane rezultaty.

Źródło: opracowanie własne.

Jedną z przyczyn jest problem identyfikacji, który sprawia, że istniejąca próba statystyczna, bez dodatkowych założeń, zwykle dostarcza argumentów popierających więcej niż jeden sposób interpretacji zdarzeń. Konieczność wykorzystania wiedzy *a priori*, a dokładniej sposób, w jaki to jest czynione, stało się przyczyną dyskusji i powstania konkurencyjnych metodyk badań, w tym modelowania empirycznego. Analizując istniejące modele gospodarek zauważamy, że niepewność modelu ma źródło nie tylko w teoriach ekonomicznych (niepewność paradygmatu *sensu stricto*), ale także w samych metodach budowy modeli, konkurencyjnych metodach prowadzenia badań empirycznych, wnioskowania statystycznego itp. Przyjmując jako kryterium sposób i stopień uwzględnienia wiedzy *a priori*, można zdefiniować kilka klas modeli. Preferujemy klasyfikację wyróżniającą: **modele czysto empiryczne, stosowane modele empiryczne, modele hybrydowe, stosowane modele teoretyczne i modele czysto teoretyczne.** W tabeli 1 zestawiono charakterystyki wymienionych klas modeli.

Rygorystyczne stosowanie zasad wnioskowania statystycznego (estymacji parametrów i diagnozowania) charakteryzuje jedynie modele czysto empiryczne. Ich użyteczność jest zwykle ograniczona, bowiem bardziej opisują, niż wyjaśniają rzeczywistość. Elementy wnioskowania ekonometrycznego spotyka się przy budowie stosowanych modeli empirycznych i modeli hybrydowych. W żadnym z przypadków nie można już mówić o proceduralnej racjonalizacji modelu poprzez rygorystycznie zastosowaną metodę badań statystycznych lub ekonometrycznych – wnioskowanie statystyczne prowadzone jest tu jedynie warunkowo. Dodatkowo zauważamy tendencję do przechodzenia do modeli z coraz większym udziałem nieweryfikowalnej wiedzy *a priori* (kalibrowanych).

Różnorodność modeli tego samego zjawiska jest faktem, a za pomocą formalnych metod i kryteriów selekcji modeli nie można wybrać „właściwego". Kryteria te są bowiem specyficzne dla każdej klasy modeli i mogą co najwyżej ułatwić budowanie rankingu modeli w ramach tej samej klasy. Próba rozwiązania dylematu niepewności modelu w sposób formalny, np. poprzez analizę poprawności zastosowanej metody budowy, nie jest więc skuteczna.

1.2.3. Badania empiryczne i teoretyczne studia porównawcze

Posiadanie kilku konkurencyjnych modeli tego samego obiektu prowokowało próby opracowania polityki, której skuteczność nie byłaby ograniczona do jednego modelu. Poszukiwano zatem reguły polityki odpornej na niepewność modelu. Sugestię podjęcia takich poszukiwań przypisuje się McCallumowi, a badania prowadzono, m. in. w bankach centralnych USA, Kanady oraz EBC[15]. Chociaż duża część eksperymentów wydaje się mieć charakter *ad hoc*, omówimy fragmenty, koncentrując się na aspektach metodycznych, tzn. kryteriach używanych do budowy reguł niewrażliwych na specyfikę modelu.

Levin i in. (1999), dysponując czterema empirycznymi modelami gospodarki USA, poszukiwali reguł prostych (efektywnych) rozwiązując dla każdego z modeli problem decyzyjny banku centralnego:

$$(\mathrm{LWW})\quad \begin{cases} S\left(F \mid \lambda, \Phi_j\right) = \lambda \mathrm{Var}\left(x_t\right) + (1-\lambda)\mathrm{Var}\left(\pi_t\right) \to \min\limits_{F\in\Phi_j} \\ x_t = \Pi\left(F\right) x_{t-1} + C\left(F\right)\varepsilon_t \\ \mathrm{Var}\left(\Delta u_t\right) \le k^2 \end{cases}$$

w którym $\Pi\ (F)$ i $C\ (F)$ są macierzami parametrów postaci zredukowanej modelu[16]. Dodatkowy warunek ogranicza wariancję zmian instrumentu u (tu stopy procentowej), stała k jest (w przybliżeniu) historyczną wariancją, zbiór Φ_j charakteryzuje klasę reguły (postać analityczną, zmienne występujące w regule, maksymalne opóźnienia, wartości parametrów), pozostałe oznacze-

[15] Gerdesmeier, Motto i Pill (2002); Levin i in. (1999), Levin i in. (2001), Levin i in. (2003), Cote i in. (2002), patrz także Bray i in. (1995).

[16] W cytowanym opracowaniu poszukiwano reguł dla modeli z racjonalnymi i antycypacyjnymi oczekiwaniami. W pierwszym kroku znajdowano rozwiązanie zlinearyzowanej wersji modelu przy danej regule $F \in \Phi_j$. Rozwiązanie takie można zapisać jako układ równań różnicowych rzędu pierwszego – w literaturze anglojęzycznej używany jest wówczas termin *companion form.* Szczegóły procedury opisują Levin i in. (1999), s. 272 i nast.

nia – jak poprzednio. Wartość funkcji S $(F|\lambda, \Phi_j)$ pozwala na ocenę efektywności reguł w różnych modelach, ocenę różnych klas reguł definiowanych przez Φ_j przy różnych preferencjach decydenta (wartościach λ)[17]. Zauważmy, że odpowiednie definiowanie zbioru Φ_j jest równoznaczne z narzuceniem dodatkowych ograniczeń na regułę. W omawianym badaniu pozwoliło to testować cechy wielu reguł efektywnych, w tym także reguł, których konstrukcja nie opierała się na paradygmacie *sensu strico* modelu.

Cząstkowe wnioski uzyskane przez Levina i in. (1999, 2001, 2003) są interesujące. Okazało się, m.in., że bardziej skomplikowane reguły (więcej zmiennych, dłuższe opóźnienia) wykazują większą wrażliwość na niepewność modelu. Reguły przyrostowe charakteryzują się większą odpornością na zmiany specyfikacji (z wyjątkiem typu oczekiwań). Reguły antycypacyjne (budowane na prognozach zmiennych) wydają się przereklamowanie. Łatwiej zbudować regułę odporną, gdy celem polityki jest nie tylko inflacja, ale również aktywność gospodarcza itd. Choć generalny wniosek potwierdza, że odporność reguły może być uzyskana dla grupy konkretnych, testowanych modeli (tu: gospodarki USA), to Meyer (2002) w pracach Levina i in. znajduje uzasadnienie użycia w polityce monetarnej reguł prostych o arbitralnie dobranych parametrach (Taylora).

Uważniej zagadnienie „niewrażliwości reguły na różnic w modelach" analizowali Gerdesmeier i in. (2002). W badaniu tym – także dotyczącym polityki banku centralnego – rozważane były dwa konkurencyjne modele inflacji wyprowadzane z dwóch różnych szkół myśli ekonomicznej. Pierwszy model uznawał – w uproszczeniu – nierównowagę w sferze monetarnej za źródło inflacji (P^*); drugi wskazywał na podstawową rolę luki popytowej (Ogap). W obu modelach pojawiały się te same zmienne, dzięki czemu można je uznać za szczególne przypadki modelu bardziej ogólnego. Założono jednak, że istniejące kryteria selekcji modeli nie pozwalają odrzucić żadnego z nich. Jest to więc przypadek dwóch różnych paradygmatów *sensu stricto*. Polityki (reguły) stopy procentowej poszukiwano, używając zestawu kalibrowanych parametrów i dla zachowania większego podobieństwa modeli wspólne parametry strukturalne obu modeli miały te same wartości. Dysponując dwoma modelami, decydent (bank centralny) powinien rozwiązać dwa zadania:

$$(\mathrm{GMP})\quad \begin{cases} \mathrm{S}(F_i) = \mathrm{E}(x'Qx) \rightarrow \min\limits_{F_i} \\ Q = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \pi_t \\ (m-p)_t \\ (m-p)_{t-1} \end{bmatrix} \\ x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t + \varepsilon_{i,t+1} \\ i = \{\mathrm{Ogap},\ \mathrm{P}^*\} \end{cases}$$

gdzie: $(m-p)$ – zasób realnego pieniądza, inne symbole – jak poprzednio. GMP ma dwa rozwiązania, o znanej już strukturze: $u_{t,i} = F_i x_t$.

Reguły te stały się punktem odniesienia w kolejnych eksperymentach, w których wyznaczano – stosując różne kryteria – typy polityk dające zadowalające efekty bez względu na model. W pierwszym z przebadanych przypadków optymalizacja opierała się na ważonej funkcji straty, tzn. rozwiązywano zadanie o postaci:

$$(\mathrm{BKE})\quad \begin{cases} \mathrm{S}(f) = \mathrm{E}(x'Hx) \rightarrow \min\limits_{f}, \\ H = \begin{bmatrix} gQ & 0 \\ 0 & (1-g)Q \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_{ogap} \\ x_{p^*} \end{bmatrix} \\ x_{t+1} = \begin{bmatrix} A_{ogap} & 0 \\ 0 & A_{p^*} \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} B_{ogap} \\ B_{p^*} \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{ogap,t+1} \\ \varepsilon_{p^*,t+1} \end{bmatrix} \\ u_t = Fx_t, \qquad F = [f, f] \end{cases}$$

Rozwiązanie BKE zależy od dodatkowego parametru g, który – używając terminologii bayesowskiej – jest subiektywnym prawdopodobieństwem *a priori* modelu. Pojawia się tu więc nowy problem – określenie g.

Pozostając w tym samym nurcie rozumowania, ważeniu można poddać modele gospodarki, również opierając się na subiektywnym prawdopodobieństwie *a priori* g. Taki problem decyzyjny ma postać:

$$(\mathrm{BMG})\quad \begin{cases} \min\limits_{F} \mathrm{E}(x'Qx) \\ x_{t+1} = \left(gA_{ogap} + (1-g)A_{p^*}\right)x_t \\ +\left(gB_{ogap} + (1-g)B_{p^*}\right)u_t \\ +\left(g\varepsilon_{ogap,t+1} + (1-g)\varepsilon_{p^*,t+1}\right) \end{cases}$$

Dodatkowo, przy jednorodnych problemach decyzyjnych można także ważyć parametrem g reguły wyznaczone z (GMP). Oczywiście, mimo użycia tej samej wartości g w ogólnym przypadku uzyskamy różne rodzaje polityki i różne ich efekty.

1.3. Konsekwentnie bayesowskie ujęcie niepewności

Tak jak alternatywą dla klasycznej statystyki jest wariant bayesowski, tak w przypadku MPG proponuje się konsekwentnie bayesowskie podejście zarówno do poszukiwania związków między celami a instrumentami, jak i wyboru najlepszej decyzji[18]. Poszukuje się wówczas nie „prawdziwego modelu", ale warunkowego rozkładu zmiennych będących przedmiotem zainteresowania (np. inflacji). Rozkład taki ma uwzględnić wiedzę *a priori* (w tym subiektywne opinie badacza lub (i) decydenta), weryfikowaną w zdyscyplinowany sposób przez dostępny materiał statystyczny. Przy danych preferencjach (funkcji celu) oraz wyznaczonym rozkładzie *a posteriori* zmiennych celu opracowanie optymalnej

[17] Autorzy w pracy z 1999 r. nie sformalizowali zasad konstrukcji reguły odpornej. Analizując istotę dokonywanego wyboru, można tu doszukiwać się zarówno elementów bayesowskiego kryterium, jak i minimaksowego. To ostatnie szerzej analizujemy w dalszej części.

[18] Zwracamy uwagę na fakt, że używane do tej pory odwołanie do bayesowskich ram analizy odnosiło się do aspektów teorio-decyzyjnych (funkcji KE) lub miało charakter *ad hoc* – pojawiał się jedynie rozkład *a priori*, nie *a posteriori*, którego konstrukcji metodologia bayesowska poświęca wiele uwagi.

decyzji staje się zagadnieniem czysto technicznym. Co więcej, ponieważ nie wszystkie typy niepewności mogą być uwzględnione za pomocą metod zaprezentowanych do tej pory, metodyka bayesowska – uznająca wszystkie elementy modelu za losowe – ma zdecydowaną przewagę, a przynajmniej tak uważają jej zwolennicy. Struktura konsekwentnie bayesowskiego opisu problemu decyzyjnego możne być zaprezentowana następująco[19].

Dany jest zbiór P rozważanych decyzji (rodzajów polityk), z których jedna musi być podjęta. Decydent dysponuje zbiorem informacji d (realizacją zmiennych losowych $d \in D$), które może wykorzystać do wyznaczenia ekonomicznych skutków proponowanych decyzji, mając dany model gospodarki m. Efekty zastosowania polityki (podjętej decyzji) p wartościuje się zgodnie z funkcją $l(p,\theta)$, gdzie $\theta \in \Theta$ reprezentuje wszystkie czynniki, które mogą oddziaływać na skutki decyzji. Niepewność co do wartości θ przekłada się na niepewność wartościowania polityki. Zakładając, że decydent minimalizuje oczekiwane straty, a warunkowy rozkład θ dany jest przez $\mu(\theta \mid d,m)$, zadanie wartościowania polityki p sprowadza się do wyznaczenia oczekiwanej straty:

$$E\left[l(p,\theta) \mid d,m\right] = \int_{\Theta} l(p,\theta)\mu(\theta \mid d,m)d\theta$$

Oczywiście, optymalną decyzją jest wybór takiej p, która minimalizuje oczekiwane straty:

$$\min_{p \in P} \int_{\Theta} l(p,\theta)\mu(\theta \mid d,m)d\theta$$

W proponowanym ujęciu optymalna decyzja zależy od rozkładu $\mu(\theta \mid d,m)$, a nie tylko dwóch pierwszych momentów, jak w zadaniach prezentowanych w podrozdziale 1.1. Dla analiz bayesowskich ważne jest także spostrzeżenie, że θ jest tu zmienną losową i niepewność θ jest opisana rozkładem *a posteriori* $\mu(\theta \mid d,m)$. Klasyczne podejście do wnioskowania statystycznego zakłada, że podzbiór θ obejmujący parametry (strukturalne) jest „pewny", ale jedynie oceny nie są „pewne", tzn. niepewność dotycząca parametrów wynika tylko z niedokładności estymacji.

Do tej pory zakładaliśmy, że model gospodarki m jest dany. Uzyskana polityka nie obejmowała zatem dyskutowanej niepewności modelu. Dlatego obecnie przyjmujemy, że m jest elementem większego zbioru modeli M, a rozkład *a posteriori* θ jest warunkowy jedynie względem d. Wartościowania polityki p dokonujemy, licząc:

$$E\left[l(p,\theta) \mid d\right] = \int_{\Theta} l(p,\theta)\mu(\theta \mid d)d\theta$$

$$(\mathrm{MA}) \quad \mu(\theta \mid d) = \sum_{m \in M} \mu(\theta \mid m,d)\mu(m \mid d)$$

$$\mu(m \mid d) = \frac{\mu(d \mid m)\mu(m)}{\mu(d)} \propto \mu(d \mid m)\mu(m)$$

Rozkład $\mu(d \mid m)$ można uznać za funkcję wiarygodności modelu m, a $\mu(m)$ jest rozkładem *a priori* modelu. Opisana równaniem (MA) procedura eliminowania z rozważań (losowych) modeli $m \in$ M, nosi w literaturze nazwę **bayesowskiego uśredniania modeli**[20]. Dysponując więc klasą modeli M, z których każdy ma wyznaczone prawdopodobieństwo $\mu(m \mid d)$, uzyskujemy rozkład determinujący θ. Pozwala to na wyznaczenie optymalnej decyzji, w której bierze się pod uwagę całość zidentyfikowanej niepewności, w tym niepewność modelu.

Niezwykle elegancki, kompleksowy i zwarty opis pełnej procedury decyzyjnej kontrastuje z problemami aplikacyjnymi. W opracowaniach dotyczących konsekwentnie bayesowskiego podejścia spotyka się więc sugestie, że większa część pracy jest tu jeszcze do wykonania. Choć przykłady zastosowań podawane w literaturze (zwłaszcza konstrukcja zbioru modeli M) – naszym odczuciu – raczej zniechęcają do sięgania po powyższe idee, możliwości wydają się trudne do przecenienia.

1.4. Ryzyko i niepewność w interpretacji F. Knighta

Dotychczas zakładaliśmy, że niepewność można jednoznacznie opisać rozkładem prawdopodobieństwa. Istnieją jednak badacze i praktycy, którzy – za F. Knightem oraz J. M. Keynesem – rozróżniają **ryzyko** od **niepewności**. Gdy możliwe jest skonstruowanie rozkładu prawdopodobieństwa, mamy do czynienia z (kwantyfikowalnym) ryzykiem. O niepewności mówimy wtedy, gdy nieokreśloność zdarzeń ma taką naturę, że opisanie jej formalną miarą (nawet w kategoriach subiektywnych) nie jest możliwe. Takie przypadki nazywa się **niepewnością w sensie Knighta**[21]. Jeśli zatem w teorio-decyzyjnym aspekcie procesu poszukiwania optymalnej polityki pojawia się niepewność w sensie Knighta, to minimalizacja oczekiwanej funkcji celu musi być zastąpiona innym kryterium – jawne lub ukryte odwołanie się do aksjomatyki oczekiwanej użyteczności nie jest możliwe. Teoria decyzji jako jedną z możliwości sugeruje wówczas kryterium minimaksowe[22]. Wydaje się zatem, że dopóki mamy do czynienia z ryzykiem, dopóty metody (*quasi-*) bayesowskie są rozwiązaniem problemu, a techniki proponowane dla niepewności w sensie Knighta są ich uzupełnieniem. Jednak uważniejsza analiza dyskusji o niepewności oraz jej wpływie na zachowania podmiotów w skali mikro i makro pokazuje, że decyzje minimaksowe są uznawane – przy-

[19] Bayesowskie ujęcie prezentujmy za Brock i in. (2003), por. także Osiewalski (2002), Sims (2002).

[20] Przykłady wykorzystania tej techniki podają np. Jacobson i in. (2002), Brock i in. (2003).

[21] W dalszej części pracy będziemy stosować konwencję, że **ryzyko** i **niepewność w sensie Knighta** są przypadkami **niepewności** (bez dodatkowego określenia).

[22] Por. np. Woodword i in. (1997), Cagliarini i in. (2000).

Tabela 2 *Reguły polityki w zadaniu von zur Muehlena*

Założenia wspólne	Niepewność Knighta (reguła minimaksowa)	Ryzyko (reguła bayesowska)
	Niepewna stała (niepewność zaburzenia)	
a_t, b_t – znane	$u_t = \frac{-1}{b_t}\left[a_t z_{t-1} + \frac{e_1 + e_2}{2}\right]$ $e_1 < 0 < e_2$	$u_t = \frac{-1}{b_t}\left[a_t z_{t-1} + e\right]$ $e_t \sim \mathrm{IID}(e, \sigma^2)$
	Niepewna dynamika	
b_t – znane a_t – podlega niepewności	$u_t = \frac{-1}{b_t}\left[\frac{a_1 + a_2}{2}\right] z_{t-1}$ $0 < a_1 < a_2$	$u_t = \frac{-1}{b_t}\left[a_t z_{t-1} + e\right]$ $a_t \sim IID(a, \sigma_a^2), e_t \sim IID(e, \sigma^2),$
	Niepewny mnożnik bezpośredni	
a_t – znane b_t – podlega niepewności	$u_t = \left[\frac{-2a_t}{b_1 + b_2}\right] z_{t-1}$ $0 < a_t < 1,$ $0 < b_1 < b_2$	$u_t = \frac{-a_t}{b + \sigma_b^2 / b} z_{t-1} - \frac{b\,e + \sigma_{eb}}{\sigma_b^2 + b^2}$ $b_t \sim IID(b, \sigma_b^2),\ e_t \sim IID(e, \sigma^2),$ $E(b_t - E\,b_t)(e_t - E\,e_t) = \sigma_{be}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie von zur Muehlen (1982/2001), Svensson (2000).

najmniej przez część autorów – za propozycję konkurencyjną[23].

1.4.1. Idea odporności – przykład ujęcia cząstkowego

Problemem niepewności o bardziej fundamentalnym charakterze, jako jeden z pierwszych, zainteresował się P. von zur Muehlen (1982/2002). Jego analiza, aczkolwiek opiera się na bardzo prostym modelu, wciąż wydaje się dobrym wprowadzeniem w zagadnienie odporności. Model von zur Muehlena ma jedno równanie wiążące instrument u z celem z, a skutki polityki wartościowane są statyczną funkcją kwadratową S (.), tzn.:

$$(\mathrm{MPG2}) \quad \begin{cases} (\mathrm{KE2}) & S(a_t, b_t, u_t, e_t) = z_t^2 \\ (\mathrm{MG2}) & z_t = a_t y_{t-1} + b_t u_t + e_t \end{cases}$$

gdzie: *a, b, e* są parametrami, których może dotyczyć niepewność. Przyjmując założenia dotyczące natury *a, b, e,* uzyskamy możliwość cząstkowej analizy niepewności – tak jak w podrozdziale 1.1. W najprostszej sytuacji *a* i *b* są znane, a niepewność skupia się w wyrazie wolnym (zaburzeniu) *e*. Przy braku rozkładu *e* decydent musi określić wartości graniczne, tzn.: $-\infty < e_1 < 0 < e_2 < \infty$ i $e_1 < e_t < e_2$. O tym, jakie będzie zaburzenie e_t, decyduje natura, przy danej polityce decydenta.

Przyjmując powyższą metodykę, zauważamy, że funkcja straty KE2 uzyskuje największe wartości, gdy natura dobiera e_t tak, aby pierwsze dwa czynniki pra-

[23] Istnieje spór dotyczący decyzji opartych na aksjomatyce oczekiwanej użyteczności Savage'a (nazywanych tu bayesowskim KE). Dyskusyjna jest kwestia, czy zauważone paradoksy (np. Ellsberga) są podstawą do odrzucenia tego wzorca i zastąpienia innym opisanym aksjomatycznie schematem racjonalnych decyzji, w którym lepiej odzwierciedlona jest ludzka awersja do niepewności oraz niejednoznaczności. Proponowane przez Gilboa i Schmeidlera konkurencyjne aksjomaty prowadzą właśnie do minimaksowych decyzji. Zdaniem Sargenta, teorio-decyzyjna aksjomatyka Gilboa-Schmeidlera jest właśnie opisem niepewności w sensie Knighta. Por. np. Hansen i in. (2000), Brock i in. (2003), Cagliarini i in. (2000).

Tabela 3 *Charakterystyka polityk niewrażliwych na niepewność paradygmatu sensu stricto*

Zmienne i Charakterystyka	Reguła BKE	Reguła BMG	Reguła MM	Reguła optymalna w modelu Ogap	Reguła optymalna w modelu *P**
			Wartości parametrów reguły		
y_t	9,572	8,541	7,554	10,051	7,358
Δp_t	9,481	9,091	8,760	10,512	8,472
$(m - p)_t$	9,525	8,344	14,987	0	15,386
$(m - p)_{t-1}$	-8,190	-6,659	-12,014	0	-12,118
			Efektywność reguły		
Strata w OGAP	7,096	7,226	8,844	6,309	9,210
Strata w P*	9,456	9,459	8,844	12,673	8,836
Średnia strata	8,276	8,343	8,844	9,491	9,023
Maksymalna strata	9,456	9,459	8,844	12,673	9,210

Źródło: Gerdesmeier, Motto i Pill (2002).

wej strony MG2 miały taki sam znak jak zaburzenie e_t. Korzystając z tego spostrzeżenia, można zaproponować politykę niewrażliwą na kaprysy natury, tzn. powodującą stratę, której maksymalna wielkość nie zależy od e_t – taką regułę przedstawiono w tabela 2. Tabela 2 zawiera także inne warianty powstające przy zastosowaniu zaproponowanej metodyki oraz – dla porównania – reguły polityki optymalnej powstające z klasycznego rozwiązania problemu MPG2[24].

1.4.2. Idea odporności – przykład niepewności paradygmatu sensu stricto

W cytowanym już studium Gerdesmeiera i in. (2002) oprócz metod wyboru reguły mających zadowalające cechy bez względu na paradygmat i mieszczących się w ramach *quasi*-bayesowskich przebadano także przypadek wyboru polityki (reguły) obliczonej nie tyle na minimalizację średniej straty, ile na minimalizację straty w przypadku najbardziej niesprzyjającym („prawdziwym" modelem jest model konkurencyjny). Rozwiązywanym zadaniem był więc MPG o postaci:

$$(\mathrm{MM}) \quad \begin{cases} \min\limits_{F} \max\limits_{i} W_i(F) \\ \mathrm{W}_i(F) = x'(F)\, Q\, x(F), \\ i = \{\mathrm{Ogap}, \mathrm{P}^*\} \end{cases}$$

W tabeli 3 zestawiono charakterystyki reguł uzyskanych z rozwiązania problemów GMP, BKE, BMG (omawianych w podrozdziale 1.2.3) oraz MM. Obliczenia wykonano dla arbitralnie przyjętych wartości parametrów strukturalnych modeli, wag funkcji celu oraz prawdopodobieństw *a priori.* Jest to zatem bardziej ilustracja niż próba sformułowania wniosków. Ponieważ w cytowanych problemach decyzyjnych nie penalizowano zmian instrumentów, reguły implikują bardzo dużą zmienność stopy procentowej.

Analiza powyższych wyników, nasuwa przypuszczenie o nieefektywności polityki budowanej według minimaksowego kryterium wyboru – np. macierzy wypłat[25] – o ile wyklucza się decyzje motywowane więcej niż jednym modelem. Mówiąc językiem teorii gier, wyboru dokonuje się wówczas według zestawu strategii prostych, pomijając mieszane.

1.5. Odporne sterowanie

Ekonomia nie jest – oczywiście – jedyną dziedziną, w której zauważono istnienie problemu niepewności modelu. W naukach technicznych istnieje nurt badań zajmujący się analizą i sterowaniem skomplikowanymi obiektami fizycznymi (np. loty kosmiczne) lub procesami (np. chemicznymi), na który z uwagą patrzą ekonomiści. Tak jak wcześniej dziedzina optymalnego sterowania była źródłem rozwiązań (pojęć, technik itp.), które coraz częściej spotykamy w literaturze ekonomicznej (operator opóźniania, równanie Eulera itd.), tak w obecnie rozwijanej dziedzinie odpornego sterowania również można znaleźć wiele użytecznych idei.

1.5.1. Niepewność strukturalna i astrukturalna

Złożone obiekty fizyczne modelowane są m.in. poprzez analizę dopływających do nich impulsów i reakcji obiektów na impulsy. Modelowe charakterystyki reakcji obiektu na impulsy nie są dokładne, przybliżają jedynie istniejące związki – immanentnym zjawiskiem jest tutaj błąd. Pojęcie niepewności odnoszone jest zatem do błędu, różnicy między modelowym opisem zjawiska oraz rzeczywistością, a wszelkie sposoby wykorzystane do wyrażania tych błędów nazywa się **reprezentacją niepewności**[26]. Reprezentacja ta zmienia się w zależności od wiedzy o źródłach powstawania różnic (np. elementach obiektu fizycznego wytwarzających błędy) oraz możliwościach operacjonalizacji tej wiedzy. W typowej sytuacji używa się nie tyle pojedynczego modelu obiektu, ile odpowiednio sparametryzowanego zbioru modeli. Klasyfikacja metod reprezentacji niepewności prowadzi do dwóch przypadków: **niepewności strukturalnej i niepewności astrukturalnej**.

Dla zilustrowania różnicy sięgnijmy po liniowy model MG[27]:

$$Dx_{t+1} = Ax_t + Bu_t + \varepsilon_{t+1}$$

gdzie, jak poprzednio, x jest wektorem zmiennych endogenicznych modelu, u – wektorem instrumentów, ε – wektorem niezależnych zaburzeń losowych o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Decydent poszukuje polityki zapisanej w postaci liniowej reguły instrumentu u, tzn.: $u_t = Fx_t$. Zakłada się, że F ma cechę stabilizowania modelu. Traktując F jak dane, postać zredukowaną modelu można zapisać (po ewentualnej eliminacji zmiennych antycypacyjnych, co wymaga dodatkowych założeń) jako:

$$x_{t+1} = \Pi x_t + C\varepsilon_{t+1},$$

Macierz Π jest funkcją poszukiwanej reguły F stabilizującej model, tzn. Π ma mniejsze od jedynki wartości własne – jest to kryterium stabilności dla systemów dyskretnych[28]. Niepewność jest reprezentowana przez ma-

[24] Prezentowane przykłady reguł minimaksowych można uzyskać zakładając rozkład równomierny elementów podlegających niepewności, co redukuje przykład do klasy quasi-bayesowskich.

[25] Rozwiązanie takie sugeruje np. K. Šmidtkowa (2003).

[26] Por. Zhou i in. (1998), s. 129 i następne.

[27] Por. np. Tetlow i in. (2001), Doyle i in. (1990). Używając terminologii odpornego sterowania charakterystycznej dla cytowanej literatury, MG byłby modelem przestrzeni stanów, x – wektorem zmiennych stanu itd. Kosztem nieco mniejszej precyzji poprzestaniemy na terminologii charakterystycznej dla podręcznikowej ekonometrii i makroekonomii.

[28] Warunek ten oznacza, że MG – bez zastosowania reguły F – może charakteryzować się zachowaniami eksplozyjnymi. W naukach technicznych niestabilność systemu jest jedną z przyczyn poszukiwania „sterownika" (F). Co więcej, projektowanie obiektów fizycznych oraz systemów ich sterowania pozwala rozważać spektrum: stabilny obiekt i zredukowane sterowanie, niestabilny obiekt i skomplikowane systemy sterowania. W zastosowaniach ekonomicznych powstaje problem, czy rzeczywiście gospodarka (zakładając, że model trafnie odzwierciedla tę cechę) nie jest w stanie funkcjonować bez permanentnej interwencji instrumentami polityki fiskalnej i monetarnej w reakcji na praktycznie każde zaburzenie. Fakt, że wiele nawet bardzo prostych modeli spotykanych w literaturze ma niestabilne wartości własne, nasuwa przypuszczenie, iż coraz więcej autorów uznaje, iż (np.) ramy instytucjonalne współczesnej gospodarki czynią ją coraz wrażliwszą na zaburzenia.

cierz Δ^{Π}, obejmującą wszystkie (mieszczące się w takiej postaci) formy błędów. Powstają wówczas dwa przypadki:

$$x_{t+1} = \begin{cases} \text{(NS)} \quad \left(\Pi + \Delta^{\Pi}\right)x_t + C\varepsilon_{t+1} \\ \text{lub} \\ \text{(NAS)} \quad \Pi x_t + \left(C\varepsilon_{t+1} + \Delta^{\Pi} x_t\right) = \Pi x_t + w_{t+1} \end{cases}$$

NS opisuje sytuację, w której niepewność została przypisana do konkretnych elementów modelu – jest to niepewność strukturalna. W wariancie NAS niepewność, gdziekolwiek ma swoje źródło, traktowana jest jak składnik addytywnego zaburzenia *w*. Sytuacja taka nazywana jest astrukturalną niepewnością. Dalsze rozważania dotyczą jedynie przypadku niepewności astrukturalnej[29].

Zaproponowana na początku opracowania postać MPG pozwala na definiowanie znacznie szerszej klasy zadań, niż to może wynikać z podanych wcześniej przykładów. Poszukując bardziej generalnej definicji KE przyjmijmy, że zmienne w stosunku, do których definiuje się cele polityki (zmienne celu) zebrano w wektor *o*:

$$o_t = M_x x_t + M_u u_t = M x_t \quad \text{i} \quad M = M_x + M_u K$$

a w każdej chwili *t* wartość funkcji celu dana jest przez:

$$z_t = Q o_t = QM x_t = H x_t$$

Powyższy zapis pozwala uniknąć definiowania dodatkowych systemów wag w funkcji celu – tu są one uwzględnione w macierzach *M* oraz *Q*. Nazywając, dla zwięzłości, wektor *z* wektorem strat, wielkość całkowitej straty będziemy mierzyli normą wektora. Różnicowanie norm pozwala na precyzyjniejsze określenie wrażliwości decydenta na straty.

1.5.2. Problem decyzyjny przy niepewności astrukturalnej

Niech Φ oznacza zbiór liniowych reguł *F* stabilizujących system. Problem decyzyjny przybiera postać:

$$\text{(RC)} \begin{cases} \underset{F\in\Phi\ ,\ ..}{extremum} \left\|z\right\|_{p1} \\ \left\|w\right\|_{p2} \le \eta + w_0' w_0 \\ \eta \ge 0 \\ x_0 = w_0 \end{cases}$$

Pierwsza z użytych norm (p_1) określa sposób pomiaru strat (wrażliwość decydenta na straty); druga (p_2) mierzy wielkość zaburzenia (wrażliwość decydenta na niepewność). Dla zadania RC definiowana jest **funkcja transferu**[30] G, uzależniająca wielkość ponoszonych strat (*z*) od ujawniających się błędów (*w*). W przypadku czasu dyskretnego funkcja ta jest dana przez:

$$\text{(TF)} \quad z_t = G_{zw} w_t \equiv H\left(I - \Pi L\right) w_t$$

$$\text{i} \quad \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi & I \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ w_{t+1} \end{bmatrix} \qquad L x_{t+1} = x_t$$

G_{ZW} określa, jaki jest wpływ mierzonych normą p_2 błędów na wielkość strat mierzonych normą p_1. Stąd w cytowanych źródłach dużo miejsca poświęca się badaniu cech tej funkcji, a dokładniej jej normy. Typ indukowanej normy funkcji transferu pozwala klasyfikować zadania. Przykładowo, norma H_2 wiąże się z zagadnieniami klasy KL; interesujące nas obecnie przypadki odporności odwołują się do normy H_{∞}. Nowym elementem w prezentowanej aparaturze jest parametr η, ograniczający skalę błędu. Sformułowana wcześniej uwaga, iż przedmiotem rozważań jest nie tyle pojedynczy model, ile odpowiednio sparametryzowany zbiór modeli, w tym momencie nabiera treści. Parametr η, którego wartość ustala decydent zgodnie ze swoimi preferencjami (potrzebą odporności), definiuje ten zbiór. Najbardziej charakterystyczny wariant zadania, nazywany problemem H^{∞}, ma postać [31]:

$$\text{(Hinf)} \begin{cases} \min_{F\in\Phi} \max_{w} \sum_{t=0}^{\infty} z_t' z_t \\ \sum_{t=0}^{\infty} w_t' w_t \le \eta^2 \\ \eta_U \ge \eta > 0 \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest stabilizująca gospodarkę (model) reguła $u_t = F x_t$ (**reguła optymalna w sensie** H^{∞}) oraz graniczna wartość η_U równa normie H_{∞} funkcji transferu G_{ZW}. W praktyce poszukuje się także rozwiązania suboptymalnego, które gwarantuje jedynie, że norma zaburzenia nie przekracza założonej wartości η.

1.6. Odporność w sensie Hansena-Sargenta

Minimaksowe kryterium optymalizacji (ekstremizacji) funkcji KE można interpretować w kategoriach dwuosobowej gry dynamicznej o sumie zerowej[32]. Polityka optymalna przy bayesowskim KE zapewnia minimalizację przeciętnych (oczekiwanych) strat wynikających z odchyleń od założonych celów, natomiast kryterium minimaksowe dobiera politykę, która zapewnia najmniejszą możliwą stratę w najgorszych dopuszczonych w analizie warunkach. „Złośliwa" *natura* dobiera najbardziej dokuczliwe zaburzenia (modelu zaburzony), a polityka ma być tak skonstruowana, aby uodpornić gospodarkę (zmienne celu) na tę sytuację.

1.6.1. Podstawy teoretyczne

Popularyzowana przez Hansena i Sargenta (2004) koncepcja procesu decyzyjnego[33] opartego na idei odpor-

[29] Wariant niepewności strukturalnej analizują Onatski i in. (2000), Tetlow i in. (2001), Zhou i in. (1996).

[30] Termin *transfer function* w polskim piśmiennictwie technicznym tłumaczony jest jako *transmitancja*.

[31] Postać problemu cytujemy za Hansen i in. (2004) oraz Tetlow i in. (2001); por. także Sargent (1999).

[32] Por. np. Stroogovel (1998).

[33] W gruncie rzeczy cytowani autorzy proponują nowy paradygmat teorii ekonomii uznając, że charakteryzowane dalej problemy optymalizacyjne dotyczą podmiotów gospodarczych, co oznacza nową interpretację równowagi i racjonalności zachowań w skali mikro i makro.

ności przy astrukturalnej niepewności (utożsamianej z niepewnością w sensie Knighta) sugeruje budowę pojedynczego modelu aproksymacyjnego (referencyjnego) i otoczenie go „obłokiem" wersji konkurencyjnych. Jednym z modeli leżących w „obłoku" jest ten, który powinien brać pod uwagę decydent („prawdziwy"). Obłok konkurencyjnych modeli jest jednak ograniczony, jego „wielkość" interpretuje się jako maksymalny, dopuszczalny błąd specyfikacji modelu referencyjnego. W przeciwieństwie do konsekwentnie bayesowskiego ujęcia, w którym konieczne jest posiadanie większego zbioru modeli (por. zbiór modeli M z podrozdziału 1.3) oraz ich rozkładów, tu pojawia się tylko jeden model. W jego otoczeniu znajduje się nieskończona liczba konkurencyjnych modeli i żaden nie ma określonego rozkładu *a priori*. W takim przypadku naturalne jest wykorzystanie minimaksowego kryterium przy ustalaniu decyzji. Dokładniej, związek między instrumentami a celami będzie się opierał na tym z modeli leżącym w zdefiniowanym wcześniej otoczeniu, który wskazuje na najgorsze konsekwencje z punktu przyjętej funkcji celu. W sformułowaniu bliskim cytowanym autorom, problem decyzyjny przybiera postać:

$$
(\mathrm{HSO}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u} \max\limits_{w} \mathrm{E}_{x_0} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(x_t' Q x_t + u_t' R u_t \right) \\ 0 < \beta \le 1 \\ x_{t+1} = A x_t + B u_t + C \left(w_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \right), \\ \varepsilon_t \sim IID(0, I) \\ E_{x_0} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} w_{t+1}' w_{t+1} \le \eta, \\ \eta_U \ge \eta \ge 0 \end{cases}
$$

W stosunku do prezentowanych wcześniej zadań nowym elementem są jawnie specyfikowane dyskonto β oraz modyfikacja funkcji celu, tak aby oprócz niepewności w sensie Knighta uwzględnić jednoczesne występowanie ryzyka (losowy ε). Hansen i Sargent przekonują, że wyrażenie:

$$
\sum_{t=0}^{\infty} w_{t+1}' w_{t+1}
$$

można interpretować jako miarę względnej entropii, która wyznacza skalę błędu specyfikacji modelu[34]. Parametr η_U ogranicza poziom niepewności (błędu specyfikacji), dla którego możliwe jest jeszcze poszukiwanie odpornej polityki. Podstawą dalszych rozważań jest jednak wariant powstający po włączeniu ograniczenia do funkcji celu, tzn.[35]:

$$
(\mathrm{HS}) \quad \begin{cases} \min\limits_{u} \max\limits_{w} E_{x_0} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(x_t' Q x_t + u_t' R u_t - \theta \beta w_{t+1}' w_{t+1} \right), \\ 0 < \theta_L \le \theta < \infty \\ x_{t+1} = A x_t + B u_t + C \left(w_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \right), \\ \varepsilon_t \sim IID(0, \mathrm{I}) \end{cases}
$$

Teraz rolę parametru η, definiującego granice niepewności, przejmuje parametr θ, pełniący funkcję mnożnika Lagrange'a. Dla $\theta \to \infty$ zadanie HS redukuje się do klasycznego zadania KL w warunkach braku niepewności (z warunkami równoważnych takiemu stanowi), a więc bez uwzględniania zasady odporności; mniejsze wartości θ czynią decydenta coraz bardziej wrażliwym na niepewność, tzn. zainteresowanie cechą odporności staje się większe. Jednak po przekroczeniu θ_L, natura zainteresowana maksymalizacją może ustalić straty na dowolnym poziomie, czyniąc poszukiwanie polityki odpornej bezowocnym. Kwestia doboru parametru θ jest zatem istotna, w ogólnym przypadku, reguła odporna zależy od θ.

Poszukując czytelniejszej interpretacji zaburzenia *w*, Walsh (2003) proponuje zapisanie modelu gospodarki odpowiadającego jej rzeczywistym cechom w postaci:

$$
(\mathrm{MPO}) \begin{cases} x_{t+1} = \bar{A}_1 x_t + \bar{A}_2 \bar{x}_{t|t} + \bar{B} u_t + \bar{C} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_t \sim IID(0, I) \end{cases}
$$

gdzie:

$\bar{x}_{t\,|\,t}$ – najlepsza prognoza wektora zmiennych modelu x_t, u – wektor instrumentów, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{B}$ – macierze parametrów, $\bar{C}$ – macierz określająca kowariancję losowego zaburzenia.

Zamiast pełnego MP0 decydent dysponuje jedynie ocenami macierzy parametrów (które oznaczamy odpowiednio: *A, B, C*). Zwykle też w chwili *t* nie są dostępne wartości zmiennych x – zastępujemy je prognozami budowanymi zgodnie z wiedzą dostępną w chwili t ($x_{t\,|\,t}$). Model decydenta jest więc budowany jako:

$$
(\mathrm{MR}) \begin{cases} x_{t+1} = A x_{t|t} + B u_t + C \varepsilon_{t+1} \\ A = (A_1 + A_2) \\ \bar{A} = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) \end{cases}
$$

Mając na uwadze postać MP0, zauważamy jednak, że:

$$
(\mathrm{MR}) \quad x_{t+1} = A x_{t/t} + B u_t + C \left(\varepsilon_{t+1} + w_{t+1} \right)
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad C w_{t+1} = \bar{A}_1 \left(x_t - \bar{x}_{t/t} \right) + \\
&(2) \quad\quad + \left[\left(\bar{A} - A \right) x_{t/t} + \left(\bar{B} - B \right) u_t + \left(\bar{C} - C \right) \varepsilon_{t+1} \right] + \\
&(3) \quad\quad + \bar{A} \left(\bar{x}_{t/t} - x_{t/t} \right)
\end{aligned}
$$

Pierwszy z członów (1) zaburzenia Walsh interpretuje jako niedoskonałość informacji, drugi (2) jest błędem specyfikacji modelu, ostatni (3) charakteryzuje błędy prognozowania. Oczywiście, powyższa dekompozycja zaburzenia *w* jest jedynie przykładem. Blok Cw_{t+1} nie ogranicza się do analogii addytywnego zaburzenia charakterystycznego dla zadań klasy KL. Zależy także od przeszłych wartości zmiennych x, co pozwala aproksymować szeroką klasę błędów specyfikacji modelu. Decydent, mając do dyspozycji jedynie model MR, ma też świadomość, że popełnia wiele błędów, ale ich skala i charakter nie są znane – stąd odwołanie do niepewności w sensie Knighta. Model MR (MP1 dla $w = 0$) jest nazywany modelem aproksymującym (referencyjnym). Zgodnie z notacją Hansena i Sargenta, nie odróżnia się zmiennych stanu od ich prognoz, stąd w oryginalnym zadaniu HS błędy prognoz nie występują.

---

[34] Por. Hansen i in. (2004) rozdział 2.

[35] Por. Giordani i in. (2002), Hansen i in. (2004).

W praktyce nie wiemy, jak wygląda model odpowiadający rzeczywistym cechom gospodarki. Dlatego norma w nie mierzy „odległości" między modelami aproksymującym a prawdziwym. Parametry η lub θ wyznaczają jedynie granicę dopuszczalnej różnicy. Dalsze postępowanie – przynajmniej, gdy koncentrujemy się na idei, a nie technikach numerycznych – wygląda następująco. Przy danym θ poszukuje się najdotkliwszego zaburzenia; zaburzenie to wyznacza jako liniową funkcją $w_{t+1} = Kx_{t|t}$. Dysponując takim K, MW zmienia się w model charakteryzujący najgorszy (dopuszczalny w warunkach brzegowych) przypadek:

$$x_{t+1} = \left(A + CK\right)x_{t/t} + Bu_t + C\varepsilon_{t+1}$$

Wypracowanie decyzji minimalizującej stratę jest już standardowe – elementy niepewności zostały już usunięte poprzez dobór K – rozwiązaniem jest teraz macierz F parametrów reguły. W dalszym ciągu rozważań zaniedbamy rozróżnienie między zmiennymi x a ich prognozami – oprzemy się zatem na oryginalnej wersji problemu HS.

1.6.2. Reguły odporne w studium Gerdesmeiera, Motto i Pilla

Ilustracją propozycji Hansena i Sargenta są wyniki poszukiwań reguły dla modeli zaczerpniętych z pracy Gerdesmeiera i in. (2002). Dla modelu P* oraz Ogap wyznaczono reguły przy różnych wartościach parametru θ, w tym dla granicznej wielkości uzyskanej z rozwiązania problemu Hinf. Dla porównania w tabeli 4 powtórzono także postaci reguł optymalnych przy braku niepewności.

Obliczenia wykonano korzystając z algorytmu proponowanego przez Giordiniego i Soderlinda oraz inżynierskiej aplikacji pakietu MATLAB[36]. Pierwszy z algorytmów opiera się na technice mnożników Lagrange'a i nie pozwala na określenie granicznej wartości parametru θ. Aplikacja MATLABa – jawnie stosująca rozwiązania wypracowane przez teorię H^{∞} – proponuje algorytmy spełniające założenia odpornego sterowania (stabilność modelu po zastosowaniu reguły, wstępna kontrola warunków koniecznych istnienia rozwiązania, poszukiwanie minimum normy H_{∞} funkcji transferu (kresu górnego η) itp.).

Zarówno dane zamieszczone w tabeli 4, jak też wyniki eksperymentów prowadzonych przez innych autorów pozwalają przypuszczać, że zastosowanie idei odpornego sterowania prowadzi do przeciwieństwa omawianej wcześniej zasady konserwatyzmu Brainarda[37]. Wyraźnie widać, że im większa niepewność (tu rosnąca wraz ze spadkiem θ), tym bardziej agresywna powinna być polityka. Eksperymentalnie ustalono, że – w warunkach zdefiniowanych przez HS – nie można wyznaczyć takich θ_{ogap} *i* θ_{P^*}, by uzyskać jednakową dla obu modeli regułę $F(\theta)$. Wynik ten jest oczywiście specyficzny dla badanych modeli. Warto jednak zwrócić uwagę na różnicę akcentów. Levin i in. oraz Gerdesmier i in. poszukiwali reguły „złotego środka". Zgodnie z przedstawioną wcześniej ideą Hansena i Sargenta, modele O_{gap} i P* tworzą dwa osobne zagadnienia. Są dwoma referencyjnymi modelami i dla każdego z nich wyznaczane jest otoczenie, w którym poszukiwane są modele wykazujące najbardziej dokuczliwe zaburzenie. Dla takich modeli konstruowane są reguły optymalne w sensie H^{∞} lub reguły suboptymalne (nazywane też odpornymi). Dlatego na uzyskane wyniki należy patrzeć uwzględniając tę różnicę. Oczywiście wszystkie szacunki mają wyłącznie charakter ilustracji.

1.6.3. Dobór stopnia odporności – prawdopodobieństwo błędu detekcji modelu

Samo sformułowanie problemu HS oraz zamieszczone w poprzednim podrozdziale wyniki obliczeń potwier-

[36] Korzystano z aplikacji *μ-Analysis and Synthesis Toolbox* MATLABa. Ponieważ autorzy oprogramowania przyjęli specyficzne konwencje, zastosowanie każdego wymagało przedefiniowania postaci problemu decyzyjnego (np. umieszczenia lub eliminacji instrumentów w funkcji celu). Znaczenie miało także oparcie procedur obliczeniowych MATLABa na algorytmach dla problemów ciągłych z transformacją do postaci dyskretnej. Zaproponowany przez Giordiniego i in. (2002) algorytm znajduje minimax w zadaniu (HS), bez rozwiązania pozostawiając kwestię stabilności – implementacje algorytmu sygnalizują jedynie ewentualną niestabilność systemu, zamiast poszukiwać ekstremum w zbiorze reguł zapewniających stabilność modeli ograniczanych przez μ.

[37] Por. np. Tetlow i in. (2001), Onatski i in. (1999).

Tabela 4 *Przykłady reguł stopy procentowej przy astrukturalnej niepewności*

Typ reguły → / Charakterystyki reguły		Optymalna w Ogap (1)	Optymalna w P* (2)	Optymalna H^{∞} w Ogap (3)	Optymalna H^{∞} w P* (4)	Odporna w Ogap (5)	Odporna w P* (6)	Odporna w Ogap (7)	Odporna w P* (8)
Zmienne	y_t	10,05	7,36	18,99	2,55	12,31	5,37	11,03	6,49
	Δp_t	10,51	8,47	99,89	26,27	33,21	15,67	20,41	11,63
	$(m - p)_t$	0,00	15,39	0,00	52,34	0,00	30,80	0,00	22,20
	$(m - p)_{t-1}$	0,00	-12,12	0,00	-44,05	0,00	-25,18	0,00	-17,82
θ		∞	∞	13,01	10,76	14,75	11,85	18,5	16,25
$\eta = \lVert G_{zw} \rVert_{\infty}$		0	0	3,61	3,28	_	_	_	_
$p(\theta)$		_	_	< 0,003	< 0,046	≈0,100	≈0,100	≈0,250	≈0,250

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem algorytmów: Giordaniego i Soderlinda (reguły 5-8) oraz aplikacji μ-Analysis and Synthesis Toolbox MATLABa (reguły 3, 4). Reguły optymalne (1-2) zaczerpnięto z Gerdesmier i in. (2002). Patrz także przypis 36.

dzają, że reguła odporna zależy od arbitralnie przyjętej wartości θ. Narzuca się zatem pomysł wykorzystania wartości granicznej definiowanej przez normę H_∞ funkcji transformacji. Jednak – zauważając, że odporność jest cechą kosztowną – bardziej zasadne wydaje się oszczędne skalibrowanie parametru θ (η). Propozycja rozwiązania tego problemu opiera się na spostrzeżeniu, iż trudno pomylić się, gdy modele referencyjny oraz krańcowy (zaburzony) różnią się znacznie. Problemem są jednak przypadki, gdy różnice w modelach są „niezauważalnie". Dlatego poszukiwany parametr θ powinien być tak dobrany, by prawdopodobieństwo pomylenia modeli było duże. Hansen i in. (2004) proponują oszacowanie bayesowskiego prawdopodobieństwa błędu detekcji modeli. Uważny czytelnik zwrócił zapewne uwagę na niekonsekwencję zdefiniowania problemu HS – przy niepewności w sensie Knighta zaburzenie deformujące model powinno pozostać nielosowe. W zadaniu HS zaburzenie rozbite jest jednak na dwie składowe: nielosowy błąd specyfikacji modelu *w* oraz klasyczny losowy składnik ε. Statystyczna metoda szacowania prawdopodobieństwa korzysta z losowości składnika proponując skonstruowanie testu ilorazu funkcji wiarygodności.

Bierzemy pod uwagę dwa modele: referencyjny (A) oraz krańcowy (B). Z modelem krańcowym związane jest najbardziej dokuczliwe zaburzenie *w*, którego wielkość zależy od dyskutowanego parametru θ. Teoretycznie możliwe jest popełnienie dwóch błędów: wybór modelu A zamiast (lepszego) B oraz wybór B zamiast (lepszego) A. Dla próby o liczebności T, przy dodatkowych założeniach dotyczących natury ε, można wyznaczyć funkcję wiarygodności każdego z modeli[38]. Oznaczając przez L_{ij} wartość funkcji wiarygodności modelu *j*, gdy dane generuje model *i*, zauważamy, że wartość współczynnika:

$$r_i \equiv \log L_{ii} - \log L_{ij} \qquad i \neq j, \qquad i,j = A,B$$

będzie dodatnia, gdy dane generuje model *i*. Jeśli model A generuje dane, to prawdopodobieństwo błędnego wyboru można wyznaczyć zliczając przypadki niedodatnich wartości r_A:

$$p_A = \mathrm{P}\{błąd \mid \mathrm{A}\} = \text{częstość}\left(r_A \leq 0\right)$$

Analogicznie definiuje się prawdopodobieństwo popełnienia drugiego z błędów. Zakładając jednakowe, równe 0,5, prawdopodobieństwa *a priori* modeli A i B, uzyskujemy bayesowskie prawdopodobieństwo błędu detekcji modeli:

$$\mathrm{p}(\theta) = 0{,}5p_A + 0{,}5p_B$$

Hansen i Sargent proponują wyznaczenie wartości p(θ) dla założonego przedziału zmienności θ, a następnie wybór takiego θ, dla którego prawdopodobieństwo błędu jest większe od założonej progowej wartości. Przy danych modelach: referencyjnym i zaburzonym, wyznaczanie prawdopodobieństwa p(θ) może się opierać na technikach symulacji stochastycznych. Przykładową implementację procedury symulowania p(θ) można znaleźć w zestawie aplikacji Gaussa i MATCABe, udostępnionych przez Giordaniego i Soderlinda. Wykres 1 przedstawia wynik takich symulacji dla modelu P* i Ogap. Szacunki wykonano używając 5000 replikacji dla próby liczącej 30 obserwacji.

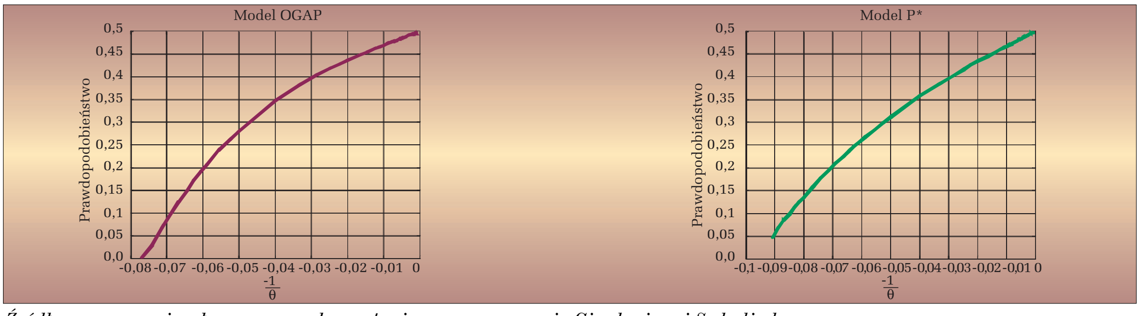
Z wykresów, jak też danych zamieszczonych w tabeli 4 wynika, że prawdopodobieństwo pomylenia modelu referencyjnego oraz zaburzonego dla granicznych wartości parametru θ jest bardzo małe (dla modeli Ogap i P*, odpowiednio, mniej niż 0,003 i 0,05). Nie ma więc uzasadnienia polityka uodparniająca na zdarzenia tak łatwe do identyfikacji. W tabeli 4 przedstawiono wyniki szacunków reguł, gdy prawdopodobieństwo popełnienia błędu wynosi 0,10 i 0,25.

1.7. Uwagi końcowe

Podsumowując dotychczasowe rozważania, zwracamy uwagę na różnicę między ryzykiem a niepewnością

38 Szczegóły przedstawiają Hansen i in. (2004) rozdz. 8.

Wykres 1 *Prawdopodobieństwo detekcji błędu w modelach* Ogap i P*



Źródło: opracowanie własne przy wykorzystaniu oprogramowania Giordaniego i Soderlinda.

w sensie Knighta. Jeżeli decydent stoi przed ryzykiem, decyzja może opierać się na minimalizacji warunkowej oczekiwanej funkcji straty (maksymalizacji funkcji użyteczności decydenta). Bayesowskie ramy wnioskowania i (lub) podejmowania decyzji pozwolą sformułować regułę (lub konkretną decyzję) minimalizującą średnie (oczekiwane) straty w badanym okresie. Jeżeli niepewność nie daje się kwantyfikować, teoria decyzji proponuje kryteria minimaksowe i odporność na najbardziej niesprzyjające okoliczności. Należy się jednak zastanowić nad argumentacją Hansena i Sargenta, dla których kryterium minimaksowe jest świadomym wyborem decydentów ceniących bezpieczeństwo (odporność). W takiej sytuacji zasada odporności staje się konkurencją dla bayesowskich ram decyzyjnych, a zdarzenia o niskim prawdopodobieństwie ważną przesłanką decyzji.

Niepewność modelu jest konsekwencją ograniczoności naszej wiedzy. Polityka biorąca to pod uwagę także może być konstruowana w ramach bayesowskich lub z wykorzystaniem zasady odporności. Koncepcja bayesowskiego uśredniania modeli oraz techniki *ad hoc* – tak jak zadania (BKE) i (BMG) w studium Gerdesmeiera i in. (2001) – wymagają wiedzy o rozkładach (prawdopodobieństwach) *a priori* modeli. Jeśli niepewność (ryzyko) nie daje się ograniczyć do konkretnych elementów modelu, to bardziej naturalne wydaje się odwołanie do zasady odporności. Poszukiwanie reguły odpornej w wąskim zbiorze modeli empirycznych – jak w cyklu prac Levina i in. (1999, 2001, 2003) – uznajemy za technikę *ad hoc*. Kompleksowym ujęciem problemu wydaje się jednak podejście Hansena i Sargenta. Niejako z definicji model uznaje się w nim za źle wyspecyfikowany, a wyznaczana reguła bierze pod uwagę taki jego wariant, który może mieć najbardziej destrukcyjny wpływ na prowadzoną politykę. Wczesny etap rozwoju tej koncepcji – podstawowa praca cytowanych autorów jest dopiero w przygotowaniu, a większość opracowań ma status materiałów dyskusyjnych – nie pozwala jednak na jednoznaczną ocenę.

Literatura

1. N. Acocella (2002): *Zasady polityki gospodarczej*. Warszawa PWN.
2. Bank of England (1999): *Economic Models at the Bank of England.*
3. M. Blix, P. Sellin (1998): *Uncertainty Bands for Inflation Forecasts*, Sveriges Riksbank.
4. W.C. Brainard (1967): *Uncertainty and the Effectiveness of Policy*. „American Economic Review”, 57.
5. J. Bray, S. Hall, A. Kuleshow, J. Nixon, P. Westaway (1995): *The Interfaces Between Policy Makers, Market and Modellers in the Design of Economic Policy. An Intermodel Comparison*. „Economic Journal”, 107.
6. W. Brock, S. Durlaf, K. West (2003): *Policy Evaluation in Uncertain Economic Environment*. Brookings Papers of Economic Activity.
7. A. Cagliarini, A. Heath (2000): *Monetary Policy-Making in the Knightian Uncertainty*. Research Department Reserve Bank of Australia, Research Discussion Paper 2000-10.
8. R. Clarida (1998): *Monetary Policy Rules in Practice: Some International Evidences*. „European Economic Review”, 42.
9. D. Cote, J. Kuszczak, J-P. Lam, Y. Liu, P. St-Amant (2002): *The Performance and Robustness of Simple Monetary Policy Rules*. Bank of Canada.
10. W. Czyżewska (2001): *Podejmowanie decyzji gospodarczych przy wielorakości celów. Optymalna polityka banku centralnego*. „Studia i Prace” ZBSE GUS, Zeszyt 275.
11. A. Estrella, F.S. Mishkin (1999): *Rethinking the role of NAIRU in Monetary Policy*. W: J. Taylor (red.): *Monetary Policy Rules*. NBER, Chicago.
12. P. Fisher (1992): *Rational Expectations in Macroeconomic Models*. Kluwer Academic Press.
13. D. Gerdesmeier, R. Motto, H. Pill (2002): *Paradigm Uncertainty and the Role of Monetary Developments in the Monetary Policy Rules*. EBC.
14. P. Giordani, P. Soderlind (2002): *Solution of Macromodels with Hansen-Sargent Robust Policies. Summary and some Extensions*. Stockholm School of Economics, CEPR.
15. S.G. Hall, S.G.B. Henry, G. Willians (1999): *Modelling Policy Rules, Fully Model-Based Approach*. Centre of Economic Forecasting. London Business School Discussion Paper 14-99.
16. L.P. Hansen, T. Sargent (2004): *Misspecification in Recursive Macroeconomic Theory*. University of Chicago, New York University and Hoover Institution, Luty 2004, rękopis.
17. L.P. Hansen, T. Sargent (2000): *Wanting Robustness in Macroeconomics*. Stanford University, rękopis.
18. T. Jacobson, S. Karlsson (2002): *Finding Good Predictors for Inflation: A Bayesian Model Averaging Approach*. Sveriges Riksbank Working Paper Series, 138.

19. K. Kasa (1998): *Model Uncertainty, Robust Policies, and the Value of Commitment*. Research Department Federal Reserve Bank of San Francisco.
20. J. Kilponen (2003): *A Positive Theory of Monetary Policy and Robust Control*. Bank of Finland Discussion Paper 8/2003.
21. K. Kim, A.R. Pagan (1995): *The Econometric Analysis of Calibrated Macroeconomic Models*. W: M. H. Pesaran, M.R. Wickens (red.): *Handbook of Applied Econometrics, Macroeconomics*. Blackwell, Oxford.
22. B. Kłos (2003): *Reguły stopy procentowej w warunkach niepewności*. „Ekonomia”, 9.
23. R. Kokszczyński (2004): *Współczesna polityka pieniężna w Polsce*. PWE.
24. F.E. Kydland, E.C. Prescott (1977): *Rules Rather then Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans*. „Journal of Political Economy”, 85.
25. A.T. Levin, J.C. Williams, V. Wieland (1999): *Robustness of Simple Monetary Policy Rules under Model Uncertainty*. W: J. Taylor (red.) (1999): *Monetary Policy Rules*. NBER, Chicago.
26. A.T. Levin, J.C. Williams, V. Wieland (2001): *The Performance of Forecast-Based Monetary Policy Rules under Model Uncertainty*. Board of Governors FED.
27. A.T. Levin, J.C. Williams (2003): *Robust Monetary Policy with Competing Reference Models*, „Journal of Monetary Economics”, 50.
28. L. Ljungqvist, T.J. Sargent (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press.
29. A. Onatski, J. Stock (2000): *Robust Monetary Policy under Uncertainty in a Small Model of the U. S. Economy*. NBER Working Paper 7490.
30. A. Onatski, N. Williams (2002): *Modeling Model Uncertainty*. EBC Working Paper 169.
31. A. Orphanides (1998): *Monetary Policy Evaluation with Noisy Information*. Board of Governors FED.
32. A. Orphanides, R.F. Porter, D. Reifschneider, R. Tetlow, F. Finan (1999): *Errors in the Measurement of the Output Gap and the Design of Monetary Policy*. Board of Governors FED.
33. J. Osiewalski (2001): *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*. WAE Kraków.
34. A. Pagan (2003): *Report on Modelling and Forecasting at the Bank of England*. Bank of England.
35. T. Sargent (1999): *Comment on Policy Rules for Open Economy by L. Ball*. W: J. Taylor (red.) *Monetary Policy Rules*. NBER Business Cycle Series vol. 31.
36. Ch.A. Sims (1988): *Uncertainty in Macroeconomics. Uncertainty Across Models*. „The American Economic Review”, 78.
37. Ch.A. Sims (1998) *Projecting Policy Effects With Statistical Models, Prepared for Presentation at the Latin American Meetings of the Econometric Society*. San Jose, Costa Rica, 2-5 sierpnia 1988 r.
38. Ch.A. Sims (2001): *Pitfalls of Minimax Approach to Model Uncertainty*, rękopis.
39. Ch.A. Sims (2002): *The Role of Models and Probabilities in the Monetary Policy Process*. Brooking Panel of Economic Activity, Princeton.
40. K. Šmidkowa (2003): *Targeting Inflation under Uncertainty. Policy Makers' Perspective*. CNB Internal Research and Policy Note, 2003/2.
41. G. Srour (2002): *Inflation Targeting under Uncertainty*. Bank of Canada, „Technical Report”, 85.
42. A.A. Stroovogel (1998): *The H-inf Control Problem. A State Space Approach*. University of Michigan, rękopis.
43. L.E.O. Svensson (2000): *Robust Control Made Simple*, rękopis.
44. R.J. Tetlow, P. von zur Muehlen (2001): *Robust Monetary Policy with Misspecified Models: Does Model Uncertainty Always Call for Attenuated Policy?* „Journal of Economic Dynamics and Control”, 25.
45. S. Turnovsky (1977): *Optimal Control of Linear Systems with Stochastic Coefficient and Additive Disturbances*. W: J. D. Pitchford, S. J. Turnovsky (red.) *Applications of Control Theory to Economic Analysis*. North-Holland.
46. B. John Taylor (1993): *Discretion versus policy rules in practice*. Carnegie-Rochester Series on Public Policy, 39.
47. P. von zur Muehlen (1982/2001): *Activist vs. Non-Activist Monetary Policy: Optimal Rules under Extreme Uncertainty (A Primer on Robust Control)*. Board of Governors FED (wznowienie opracowania przygotowanego w 1982 r.).
48. C. Walsh (2003): *Implications of Changing Economic Structures for the Strategy of Monetary Policy, Symposium on Monetary Policy under Uncertainty: Adapting to a Changing Economy, Federal Reserve Bank of Kansas City*. Jackson Hole, 28-30 sierpnia 2003, Wyoming.
49. A. Wojtyna (2003): *W poszukiwaniu optymalnej reguły polityki pieniężnej* „Studia Ekonomiczne” nr 1-2.
50. T.R. Woodword, R. C. Bishop (1997): *How to Decide when Experts Disagree. Uncertainty-Based Choice Rules in Environmental Policy*. „Land Economics” 73, 4.
51. K. Zhou, J. Doyle (1998): *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall.
52. K. Zhou, J. Doyle, K. Glover (1996): *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.