

Metody wyznaczania współczynnika Hursta dla procesów telekomunikacyjnych i bankowych

Helena Bereś, Krzysztof Bereś, Jolanta Zięba

Wstęp

W przedstawianej pracy podjęto próbę opisu procesów stochastycznych, występujących w tak odległych od siebie dziedzinach życia, jak telekomunikacja i bankowość. Wspólnym mianownikiem tych procesów jest możliwość obserwacji ich istotnych zmian. W przypadku telekomunikacji jest to okres kilkudniowy, a w przypadku bankowości - kilka lat. Procesy te powstają jako wynik działalności określonej grupy ludzi i są opisywane przez te same parametry statystyczne.

Proces $\{X_t\}$ jest **stacjonarny**, jeśli jego wartość oczekiwana nie zależy od czasu,

$$E(X_t) = \eta_X = \text{const} \quad (1)$$

a kowariancja zależy jedynie od τ : $\text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) = C_{X,\tau}$ (patrz Percival et al.).

Jeśli ciąg samokowariancji jest sumowalny z kwadratem:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{X,\tau}^2 < \infty,$$

to **widmo mocy** procesu jest równe:

$$S_X(f) = \Delta t \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{X,\tau} \cdot \exp\{-2\pi i f \tau \Delta t\} \quad \text{dla } |f| \leq f_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \quad (2)$$

gdzie f_N oznacza częstotliwość Nyquista.

Mówimy, że $\{X_t\}$ jest **samopodobnym** procesem stacjonarnym (procesem stacjonarnym z długą pamięcią), jeśli istnieje takie α : $-1 < \alpha < 0$ i $A_S > 0$, że

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{S_X(f)}{A_S \cdot |f|^\alpha} = 1 \quad \text{czyli } S_X(f) \approx A_S \cdot |f|^\alpha \quad \text{dla } f \rightarrow 0 \quad (3)$$

tzn. wtedy, gdy widmo mocy jest proporcjonalne do $|f|^\alpha$ dla $f \rightarrow 0$. Dla $\alpha \leq -1$ proces $\{X_t\}$ jest niestacjonarny.

W celu określenia samopodobieństwa procesowi zamiast wykładnika α używa się pojęcia **współczynnika samopodobieństwa Hursta** ($0 < H < 1$), gdzie $\alpha = 1 - 2H$.

Proces jest stacjonarny, ale nie samopodobny dla $H \leq 0.5$. Proces jest niestacjonarny z długą pamięcią, jeśli $H \geq 1$. (4)

Samopodobieństwo procesu stacjonarnego można określić także w inny sposób:

Stacjonarny proces $\{X_t\}$ ma długą pamięć, jeśli istnieje takie $\beta = -1 - \alpha$: $-1 < \beta < 0$ i $A_S > 0$, że

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C_{S,\tau}}{A_S \cdot \tau^\beta} = 1, \quad \text{czyli } C_{S,\tau} \approx A_S \cdot \tau^\beta \quad \text{dla dużych } \tau \quad (5)$$

Współczynnik Hursta wprowadzono do analizy procesów samopodobnych w celu określenia stopnia

powtarzania się pewnych własności procesu w każdej skali. Dla skończonych prób oznacza to, że minimalną skalą jest okres pozwalający na sensowne wyznaczenie współczynnika Hursta, a maksymalną skalą czasu jest okres całej próby. Jeśli współczynnik Hursta zmienia się w czasie, mówimy o procesach **lokalnie samopodobnych**.

Przykładami procesów samopodobnych są fale podziwowe Nilu, procesy zajęcia linii telefonicznych czy internetowych lub procesy kolejkowe. W poniższej pracy podjęto próbę wyznaczenia zależności funkcji samopodobieństwa w procesach telekomunikacyjnych oraz w niektórych procesach bankowych. Analizujemy dwa przykłady procesów bankowych. Pierwszy jest rozkład dziennych kwotowań stóp procentowych rynku pieniężnego WIB (niezależność tych decyzji badamy w odniesieniu do decyzji banku centralnego ustalającego stopę referencyjną). W drugim przykładzie z tej dziedziny analizujemy wahania poziomu środków pieniężnych utrzymywanych przez banki komercyjne na rachunkach bieżących w NBP, w odniesieniu do średniego poziomu rezerwy obowiązkowej, który zależy od stopy rezerw ustalonej przez NBP.

Wyznaczanie współczynnika Hursta dla procesów o cechach samopodobieństwa

Transformata falkowa jako narzędzie pomocnicze przy badaniu procesów stochastycznych została zdefiniowana i opisana przez wielu autorów w latach 90. poprzedniego wieku (patrz Mollat, 1989; Daubechies, 1992). W tym artykule używamy dyskretnej transformaty Haara (jako jądro transformaty czasowo-częstotliwościowej stosuje się złożenie ujemnego i dodatniego skoku jednostkowego w odpowiednich przedziałach), gdyż nie wprowadza ona dodatkowych ograniczeń na badane procesy. Transformata falkowa to analiza częstotliwościowa procesu.

Wang et al. pokazali, że jest możliwe otrzymanie wartości współczynnika Hursta przy pomocy transformaty falkowej.

Założono, że $X(t)$ jest procesem o wartości średniej równej zero: $E(X(t)) = 0$ i kowariancji:

$$\Gamma_i(u_1, u_2) = \text{cov}\{X(t+u_1), X(t+u_2)\}$$

Proces jest lokalnie samopodobny, jeśli spełnia:

$$\Gamma_i(u_1, u_2) = \Gamma_i(0, 0) - A(t) \cdot |u_1 - u_2|^{2h(t)} \cdot (1 + o(1))$$

dla $|u_1| + |u_2| \rightarrow 0$.

Wariogram procesu spełnia:

$$E\left\{X(t+u_1) - X(t+u_2)\right\}^2 = 2A(t) \cdot |u_1 - u_2|^{2h(t)} \cdot (1 + o(1))$$

dla $|u_1| + |u_2| \rightarrow 0$

Transformatę falkową oznaczono przez:

$$W_t(a) = a^{-1/2} \int \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) \cdot X(u) du = a^{1/2} \int \psi(x) \cdot X(t+ax) dx$$

Wykorzystując powyższą definicję, Wang et al. pokazali, że lokalne widmo mocy:

$$E\left(|W_t(a)|^2\right) = A \cdot a^{1-2h(t)} \text{ dla } a \rightarrow 0$$

Po zlogarytmowaniu otrzymujemy:

$$\log E\left(|W_t(a)|^2\right) = \log(A) + (1-2h(t)) \cdot \log(a), \quad a = J_0, \dots, \left[\frac{J}{2}\right] \quad (6)$$

gdzie: liczebność próby $n = 2^J$, $J_0 = 1, 2, \dots$, jest parametrem wolnym, podobnie jak J , które musi jedynie spełniać warunek, że $2^J \leq N$, gdzie N oznacza liczebność próby.

$$\text{Jeżeli } 1-2h(t) = \alpha \in (-1, 0) \text{ to } h(t) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (7)$$

Procesy iid, procesy H-sssi¹ oraz niezależne wyznaczenie współczynnika Hursta

P. Embrechts et al. (1997) pokazali, że dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie (iid) maksymalne wartości mają uogólniony rozkład Pareto (GPD):

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma - 1} > 0, \quad -1 < \gamma < 0, \quad x \geq 0$$

lub $\gamma > 0, \quad 0 < x < \frac{\sigma}{\gamma}$

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma - 1} dx = \left[x \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma} - \int \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma} dx \right]_0^{\infty} =$$

$$= \left[-x \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma} + \int \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma} dx \right]_0^{\infty} = \left[\frac{-\sigma}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{\sigma} x\right)^{1/\gamma + 1} \cdot \frac{1}{1/\gamma + 1} \right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{1 + \gamma}$$

Dla $\gamma = -1$ mamy: $f(x) = \frac{\sigma}{(x + \sigma)^2}, \quad EX = \infty$

Dla procesów H-sssi (**self-similar stationary increments**), jako podzbioru symetrycznych α -stabilnych H-sssi procesów, rozkłady brzegowe $P(Y(t) \geq x) = L(x) \cdot x^{-\alpha}$ dla $0 < \alpha < 2$. Jeżeli proces H-sssi ma niezależne przyrosty, to nazywamy go α -stabilnym ruchem i wtedy $H = 1/\alpha$ (patrz Maejima, 1986).

¹ W tłumaczeniu polskim iid jest procesem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie, (sssi) jest samopodobnym procesem ze stacjonarnymi przyrostami.

Przybliżenie skrzydeł rozkładu transformaty falkowej zajęcia linii w procesie telekomunikacyjnym za pomocą GPD pozwalało na niezależne wyznaczenie współczynnika Hursta w tych procesach: $H \approx -\gamma$.

Wyznaczone wartości H dla procesów „y”, tzn. długości zajęcia linii, i „z”, tzn. długości rozmów zarejestrowanych w ciągu jednego dnia (dla skrzydeł GPD transformaty falkowej) wynoszą odpowiednio: $\gamma_y = -0.474$ i $\gamma_z = -0.287$ dla szerokiego przedziału $J = 7 \dots 14$ podprzedziałów wyznaczania transformat. Współczynnik korelacji wartości „ γ ” z wielkościami $h(t)$ wyznaczanymi metodą Wang et al. jest bliski jedności. Oznacza to, że badane procesy są typu H-sssi.

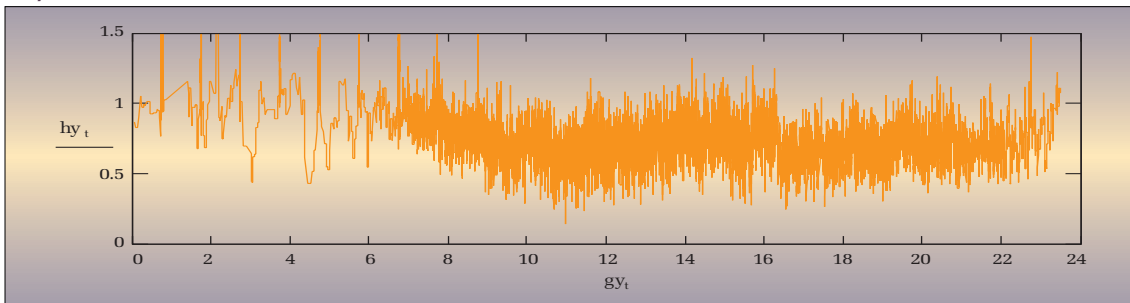
Porównanie współczynników Hursta dla procesów telekomunikacyjnych

Dla dwóch prób procesu telekomunikacyjnego², długości zajęcia linii (próba „y”) oraz długości rozmów zarejestrowanych w ciągu jednego dnia (próba „z”) wyznaczono lokalne wartości współczynnika Hursta $h(t)$. Na wykresach 1 i 2 pokazano wykresy zależności $h = h(t)$.

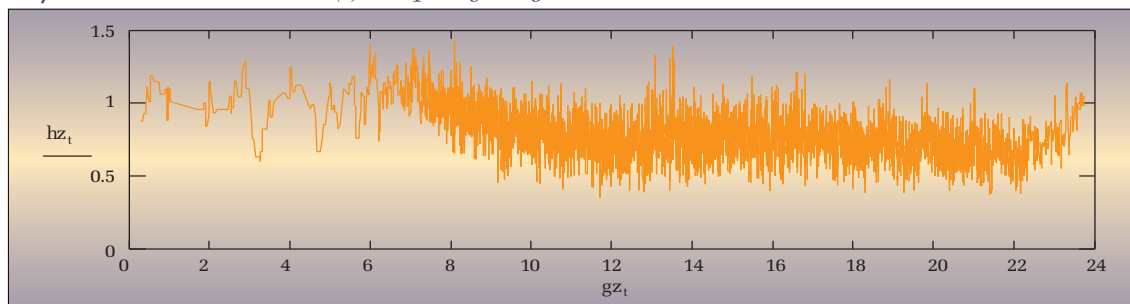
Średnia wartość funkcji $h = h(t)$ dla procesu długości zajęcia linii $EH_y = 0,72947$. Analogiczna wartość dla procesu długości rozmów wynosi $EH_z = 0,77038$. Wielkości te pokazują, że oba procesy te są stacjonarne i samopodobne (patrz definicja (3) i oszacowanie (7).

² Dane uzyskane dzięki uprzejmości TPSA, Oddział Kielce.

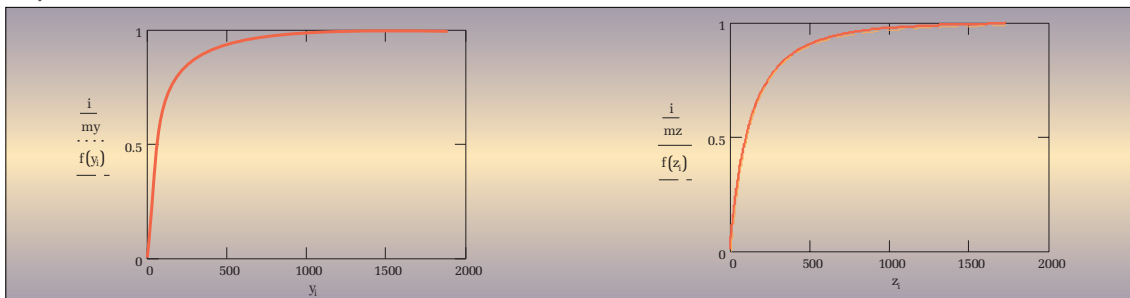
Wykres 1 Zależność $h = h(t)$ dla próby długości zajęcia linii



Wykres 2 Zależność $h = h(t)$ dla próby długości rozmów



Wykres 3 Zgodność rozkładów GPD teoretycznych i empirycznych dla prób „y” i „z”



Parametry rozkładów GPD dla procesów telekomunikacyjnych są dobrze określone.

Dla próby „y” i „z” wynoszą one odpowiednio:

$$\gamma_y = -0.7329 \quad i \quad \gamma_z = -0.4558$$

Średniokwadratowe odchyłki od aproksymowanych rozkładów wynoszą odpowiednio:

$$\Delta y = 0.00834, \quad \Delta z = 0.00433$$

Na wykresie 3 pokazano, że parametry γ dobrze opisują skrzydła rozkładów.

Należy zaznaczyć, że parametry w tych próbach określają ciężkie skrzydła rozkładu zmiennej losowej w przeciwieństwie do lokalnego współczynnika Hursta $h(t)$, który określa samopodobieństwo procesu.

Niezależność stóp rynku pieniężnego na podstawie cech procesów bankowych

Procesy zachodzące na rynku pożyczek międzybankowych przejawiają się w sposobie kształtowania się stóp procentowych. Dysponujemy danymi warszawskiego indeksu międzybankowego WIBOR od 9.01.1998 r. do 10.06.2003 r., w kategoriach: ON (1 dzień), TN (1 dzień od jutra), 1W (tygodniowe), 1M (miesięczne) oraz 3M (trzymiesięczne)³. Próby oznaczone w tekście symbolami: ON, TN, 1W, 1M oraz 3M mają długość $\gamma n_a = 1.375$ dni roboczych. Procesy te były testowane już wcześniej, gdy ich długość wynosiła $n=969$ dni, tj. w okresie od 9.01.1998 r. do 26.10.2001 r.

Współczynniki Hursta obliczone dla obydwu prób świadczą, że procesy WIB wykazują cechy samopodobieństwa, to znaczy powtarzają się w miarę wydłużania horyzontu czasowego próby, ale nie są stacjonarne (4).

Przeprowadzono również obliczenia parametrów stochastycznych dla oryginalnych procesów indeksów międzybankowych $\{X(t) = (t), t > 0\}$, wyniki zestawiono w tabelach 1 i 2.

³ Autorzy dziękują Pawłowi Przesmyckiemu z Departamentu Systemu Finansowego NBP za udostępnienie dziennej bazy danych WIB.

Niezależność zmiennych losowych wpływających na warszawski indeks międzybankowy testowano za pomocą parametru γ , wyznaczonego z brzegowego rozkładu GPD. Rezultaty aproksymacji parametrów dla stawek 1W i 1M przedstawia wykres 4. Pokazuje on wyraźnie, że w całym okresie rozkłady procesów WIBOR dla stawek 1W i 1M nie są sumą niezależnych zmiennych losowych, są bowiem źle aproksymowane przez GPD.

Średniokwadratowe odchyłki od aproksymowanych rozkładów wynoszą odpowiednio:

$$\Delta W = 0,05016, \quad \Delta M = 0,07059$$

Wysoka dodatnia wielkość współczynnika γ oznacza, że proces nie jest sumą niezależnych zmiennych losowych, a więc może być rozpatrywany jako suma zmiennych losowych zależnych. Odnosi się to w szczególności do stawki 1M, dla której wyznaczone parametry wskazują na obecność czynników zewnętrznych sprawiających, że kolejne wartości tego procesu stają się od siebie uzależnione. Sugerujemy, iż czynnikami tymi są decyzje władz monetarnych z zakresu polityki pieniężnej oraz że wielkość współczynnika γ dla danej stawki WIBOR charakteryzuje siłę wpływu oficjalnych stóp procentowych NBP na stopy rynku pieniężnego.

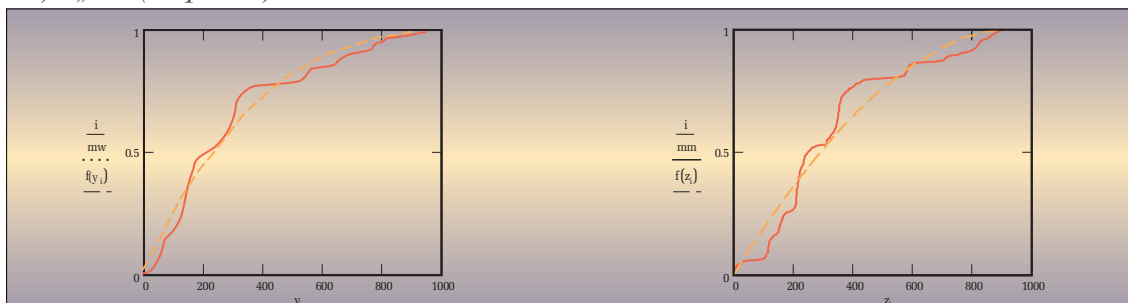
W okresie od lutego 1998 r. do grudnia 2002 r. stopą referencyjną, za pomocą której bank centralny regulował płynność na rynku pieniężnym była 28-dniowa stopa operacji otwartego rynku, a więc stopa o terminie porównywalnym z 1M. Spośród wszystkich szeregów rozpatrywanych w tym przykładzie, wartości γ otrzymane dla procesu 1M najsilniej wskazują na bezpośrednie sterowanie przez czynniki zewnętrzne. Analiza tego współczynnika w krótszych okresach (jednego roku) pokazuje, że zarówno w skali rocznej (pomijając rok 1999), jak i w całym analizowanym okresie istniał silny wpływ banku centralnego na jednomiesięczną stawkę rynku pieniężnego. W latach 2000-2002 wpływ ten stopniowo się umacniał, a w 2003 r. osłabł (należy przy tym zaznaczyć, że dla 2003 r. wynik dotyczy pierwszego półrocza).

Działania decyzyjne NBP w zakresie zmian stóp procentowych znajdują również odbicie w procesie 3M. W 1998 r. wpływ ten był nawet nieco silniejszy niż

Tabela 1 Porównanie lokalnych współczynników Hursta $h(t)$ dla procesów oryginalnych WIB w latach 1998 - 2003

Rok	Próba				
	ON	TN	1W	1M	3M
1998	1,490	1,605	1,844	2,131	2,088
1999	1,787	1,887	2,219	2,544	2,427
2000	1,172	1,305	1,463	1,401	1,822
2001	1,224	1,221	1,374	1,578	1,579
2002	1,268	1,362	1,518	1,724	1,915
2003	1,642	1,702	2,074	2,172	2,153
1998-2003	1,410	1,495	1,716	1,901	1,980

Wykres 4 *Niezgodność rozkładów GPD teoretycznych i empirycznych dla prób „1W” (na lewo) i „1M” (na prawo).*



na proces 1M, co możemy uzasadnić w następujący sposób. W okresie wcześniejszym, tj. w latach 1996-1997, NBP kontrolował rynek pożyczek międzybankowych emitując trzymiesięczne bony pieniężne. Otrzymany przez nas wynik sugeruje, że w 1998 r. decyzje dotyczące nowej 28-dniowej stopy referencyjnej wpływały silniej na trzymiesięczną stawkę rynku pieniężnego, według której rynek orientował się w ciągu ostatnich lat niż na stawkę 1M. Sprzyjał temu fakt, że stopa 28-dniowa, stosowana w operacjach otwartego rynku od lutego 1998 r., została początkowo ustalona na poziomie ostatnio przeprowadzanych operacji, a więc na poziomie trzymiesięcznych bonów pieniężnych NBP. Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że stopa, która najsilniej oddaje oczekiwania rynku pieniężnego co do zmian oficjalnych stóp procentowych, jest trzymiesięczna stawka WIBOR.

W całej tabeli wyników można zauważyć, że na krótkie okresy pożyczek międzybankowych większy wpływ wywierają czynniki losowe, będące przejawem życia gospodarczego, niż sterowanie stopą procentową przez bank centralny. Decyzje banku centralnego silniej przejawiają się w pożyczkach na okresy dłuższe. Kiedy proces wykazuje zależność od losowych czynników ekonomicznych, wartość parametru γ maleje i staje się ujemna. Charakterystyczne pod tym względem są dwa lata: 1999 r., kiedy zmiany reżimu kursowego doprowadziły do większej swobody wahań kursu walutowego, oraz 2001 r., w którym pękła bańka spekulacyjna na międzynarodowym rynku finansowym. W tym czasie czynniki losowe w większym stopniu wpływały na rynek pieniężny niż regularne operacje NBP i zmiany oficjalnych stóp procentowych.

Wyraźne zmniejszenie wartości parametru γ w pierwszym półroczu 2003 r. wskazuje na osłabienie wpływu banku centralnego na przebieg wszystkich analizowanych tu procesów. Wprowadzona na początku 2003 r. zmiana zakresu i częstotliwości operacji otwartego rynku (obecnie są to operacje 14-dniowe, organizowane raz w tygodniu) oraz rozwój innych instrumentów służących regulacji płynności powodują, że nie obserwuje się już zdecydowanego wpływu NBP na żadną z analizowanych stawek. Wpływ ten może jednak istnieć w stosunku do stopy dwutygodniowej, czego nie można bezpośrednio pokazać ze względu na krótki okres trwania tego procesu. Pod pewną, aczkolwiek bardzo słabą kontrolą władz monetarnych pozostaje jeszcze stawka 1M. Może to być jednak efekt inercji, podobny do opisanego wcześniej przypadku stawki 3M.

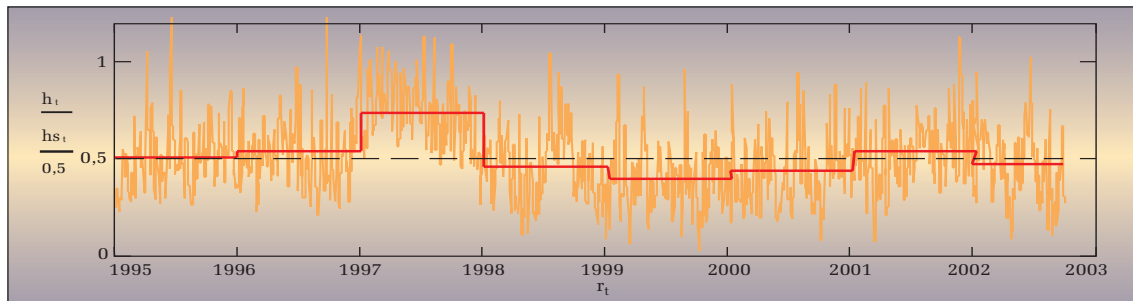
Zakładając, że czynnikiem uzależniającym wielkości procesów WIB jest polityka pieniężna, na podstawie współczynników γ można stwierdzić, że w latach: 1998, 2000 i 2002 wszystkie omawiane stopy międzybankowe dają się określić jako zmienne ekonomiczne egzogeniczne. Natomiast w latach 1999 i 2001 oraz w 2003 r. stopy procentowe WIBOR w zakresie ON, TN, 1W, 1M i 3M wykazują cechy endogeniczne.

Niezależność odchylenia środków na rachunku bieżącym od rezerwy obowiązkowej

Przebadano próbę przedstawiającą wahania środków pieniężnych na rachunkach bieżących banków komer-

Tabela 2 *Porównanie wyników wielkości γ dla procesów WIB w latach 1998-2003 (około 5,5 roku)*

Rok	Próba				
	ON	TN	1W	1M	3M
1998	0,555	0,577	0,807	1,157	1,428
1999	-1,615	-1,500	-0,744	-0,633	-0,071
2000	0,134	0,245	0,349	0,454	0,302
2001	0,156	-0,257	-0,408	0,954	0,588
2002	0,236	0,279	0,437	0,685	0,454
2003	0,046	0,051	0,076	0,112	0,079
1998-2003	0,406	0,366	0,312	0,543	0,751

Wykres 5 Zależność funkcji samopodobieństwa $h=h(t)$ dla rozkładu wolnych środków banków.

cyjnych w NBP powyżej poziomu określonego warunkami rezerwy obowiązkowej. Banki komercyjne są zobowiązane do odprowadzania rezerwy od depozytów złotych i walutowych zgodnie z zaleceniami NBP oraz do rozliczenia jej w określonej kwocie na koniec okresu rezerwowego. Rozkład nadwyżek zależy częściowo od optymalizacyjnych działań banków, zmierzających do utrzymania jak najniższego poziomu tych środków. Z drugiej jednak strony wielkość dziennych rachunków bieżących zależy od popytu na pieniądź. Wahania poziomu rachunków bieżących mogą rodzić nadzieję, że w pewnych okresach wystąpi tendencja do systematycznego wzrostu nadwyżkowych rezerw, świadcząca o wzroście popytu na pieniądź. Z tego powodu ważna jest znajomość procesu wywołującego rozkład wolnych środków banków.

W badaniu posłużono się szeregiem czasowym, przedstawiającym wyliczoną *ex post* wartość średnią dziennego odchylenia stanu środków pieniężnych od poziomu wymaganego przez system rezerwy w okresie od stycznia 1996 r. do września 2003 r. Próba liczy 2.021 obserwacji i przedstawia procentowy udział wolnych środków banków komercyjnych w dziennym pieniądzu rezerwowym NBP⁴.

Wykres 5 wskazuje, że proces przejawia cechy samopodobieństwa w pewnych przedziałach. Zestawio-

no na nim wartości funkcji samopodobieństwa $h = h(t)$ (oznaczenie h_t) i jej wartości średnie (oznaczenie $h_{s,t}$) w kolejnych latach od 1996 do 2003. Jedynie w roku 1999 wartość średnia była mniejsza od 0,5. Na wykresie widzimy, że w 1999 r. nastąpiła zmiana jakościowa procesu samopodobnego, tzn. rozkład odchylenia środków na rachunku bieżącym od rezerwy obowiązkowej nie ma grubych skrzydeł (*heavy tails*).

Zaobserwowana niejednorodność mogła powstać pod wpływem obniżki oficjalnej stopy rezerwy obowiązkowej przez NBP w 1999 r. W rezultacie poziom rezerwy obowiązkowej w systemie spadł z około 25 mld zł w sierpniu do około 10 mld zł we wrześniu tego roku. Tak duża zmiana poziomu rezerwy wywołała istotne zaburzenie płynności w systemie.

Podobnych perturbacji można oczekiwać także w przyszłości, kiedy zostanie podjęta decyzja o dalszej redukcji stopy rezerwy obowiązkowej. Aby uniknąć podobnych zaburzeń, raczej nie należy dokonywać jej aż na tak dużą skalę.

Parametr γ , określający niezależność zmiennych losowych, oraz wielkości współczynnika Hursta dla badanego procesu zestawiono w tabeli 3. Należy zaznaczyć, że wyniki te otrzymano z rozkładów brzegowych, dobrze opisywanych przez uogólnione rozkłady Pareto (GPD). Średniokwadratowa odchyłka od aproksymowanego rozkładu γ wynosi $\Delta w = 0.02295$.

Dodatnie wartości parametru wskazują, że proces ten jest sumą zmiennych losowych zależnych. Oznacza to, że wielkości nadwyżkowych rezerw wyrażone w

Tabela 3 Porównanie wyników wielkości γ i h dla procesu odchylenia wolnych środków banków od rezerwy obowiązkowej w latach 1996 - 2003 (7,5 roku)

Rok	Liczebność próby	H	γ
1996	262	0.501	0,190
1997	261	0.534	0,166
1998	261	0.730	0,206
1999	261	0.455	0,230
2000	260	0.391	0,148
2001	261	0.434	0,323
2002	261	0.535	0,350
2003	194	0.468	-0,115

⁴Autorzy dziękują Pani Krystynie Kubackiej z Departamentu Operacji Krajowych NBP za możliwość pozyskiwania zagregowanych dla systemu bankowego dziennych danych podaży pieniądza rezerwowego oraz Wydziałowi Rezerwy Obowiązkowej DOK za udostępnienie danych o rezerwie.

procentach emisji pieniądza rezerwowego w latach 1996-2002 były całkowicie pod kontrolą i nie zależały od czynników losowych. Jak pokazują wartości parametru wyznaczonego dla pierwszych dziewięciu miesięcy 2003 r., w tym roku sytuacja radykalnie się zmieniła. Może to wynikać ze zmiany sposobu zarządzania płynnością przez banki w efekcie wprowadzenia przez NBP nowego instrumentu, którym jest depozyt na koniec dnia. Od grudnia 2001 r. banki komercyjne mogą lokować nadwyżkowe środki na oprocentowanym koncie w NBP.

Wnioski

Jak pokazano na przykładach, istniejące definicje matematyczne pozwalają na wyznaczanie parametrów wybranych procesów. W przypadku procesów telekomunikacyjnych mamy do czynienia z określonymi sposobami korzystania z połączeń telefonicznych w zależności od pory dnia. W przypadku procesów bankowych występuje pewien sposób kształtowania się odchylenia wolnych środków banków od poziomu rezerwy obowiązkowej w zależności od zmiany warunków utrzymania rezerwy i od popytu na dzienny pieniądz rezerwowo. W obu przypadkach stwierdzono cechy sa-

mopodobieństwa. Można więc przypuszczać, że został zidentyfikowany daleki odpowiednik stylu działania człowieka. Wysokość stopy rezerwy obowiązkowej jest instrumentem polityki pieniężnej banku centralnego. Nasze wyniki pokazują, że realizacja tej polityki poprzez ten instrument nie zakłóca procesu decyzyjnego banków komercyjnych. Wysokość nadwyżkowych rezerw banków, jak się okazuje, jest procesem stacjonarnym, zależnym wyłącznie od czynników ekonomicznych.

Analizowane przez nas procentowe stawki WIBOR są natomiast procesami niestacjonarnymi z długą pamięcią⁵. Po sprawdzeniu, czy są to procesy typu (iid) stwierdzamy, że zarówno stopy rynku pieniężnego, jak i odchylenia wolnych środków banków od poziomu rezerwy wymaganej do 2002 r. były pod kontrolą.

Narodowy Bank Polski nie prowadził dotychczas swojej polityki według ściśle określonej reguły. Pomimo to polityka stopy rezerwy obowiązkowej nie przyczyniała się do zakłócenia procesu tworzenia nadwyżkowych rezerw, a polityka stopy procentowej wyraźnie ograniczała jej swobodne kształtowanie się na rynku.

⁵ Na temat procesów samopodobnych ukazała się właśnie książka Petera M. Robinsona: *Time Series with Long Memory* wydana przez Oxford University Press, USA.

Prace cytowane

1. P. Embrechts, C. Klüppelberg, H. Mikosch (1997): *Modeling of extremely events for insurance and finance*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
2. I. Daubechies (1992): *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM.
3. M. Maejima (1986): *A remark on self-similar processes with stationary increments*. Canadian J. Statist. 14, s. 81-82.
4. S.G. Mollat (1989): *A Theory for Multi-Resolution Decomposition*. IEEE, Trans. Pat. Mach. Intel. 11, s. 674-693.
5. D.B. Percival, A.T. Walden (2000): *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
6. Y. Wang, J.E. Cavanaugh, C. Song (2001): *Self-similarity index estimation via wavelets for locally self-similar processes*. "Journal of Statistical Planning and Inference" 99, s. 91-110.