

Jednoczynnikowe modele Vasička oraz CIR – analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych*

Marcin Stamirowski

Wprowadzenie

Jednoczynnikowe modele terminowej struktury stóp procentowych zajmują ważne miejsce w monografiach dotyczących modelowania stóp procentowych¹. Najczęściej jednak omówienie dwóch klasycznych modeli Vasička (1977) oraz Coxa, Ingersolla i Rossa (w dalszym ciągu zwanego CIR, 1985) sprowadza się do wskazania wad, które utrudniają ich praktyczne wykorzystanie. Opracowania zawierające rzetelną, pogłębioną analizę własności tych modeli należą do rzadkości². Podstawową tego przyczyną jest fakt, że w ostatniej dekadzie pojawiły się liczne modele struktury terminowej, które z powodzeniem zastępują modele klasyczne w zdecydowanej większości zastosowań. Proste przybliżenia krzywej zerokuponowej dokonywane są na podstawie danych z rynku swapów walutowych lub swapów opartych na stopach procentowych. W wycenie bardziej skomplikowanych instrumentów, takich jak np. opcje na obligacje czy skomplikowane opcje egzotyczne, wykorzystuje się bardziej wyrafinowane modele, które umożliwiają idealne dopasowanie do obserwowanej struktury terminowej stóp procentowych, jak również do obserwowanej struktury zmienności stóp procentowych (np. jednoczynnikowe modele Blacka, Dermmana i Toya (1990) czy też Hulla i White'a (1993) lub schemat HJM (1992)).

Pewne własności modeli klasycznych pozostają jednak atrakcyjne pod względem praktycznych zastosowań. Należy do nich zaliczyć przede wszystkim intuicyjną interpretację procesu krótkoterminowej stopy procentowej, który wykazuje (omówioną szerzej w opracowaniu) własność „powrotu do średniej”. Inną interesującą cechą są znane analityczne postaci wynikowych rozkładów stóp procentowych. Własność ta nie tylko bardzo ułatwia estymację parametrów modeli (zwłaszcza w przypadku modelu Vasička), ale również umożliwia dokonywanie prognoz krótkoterminowych stóp procentowych na podstawie skalibrowanych modeli. Ponadto, oba modele umożliwiają estymację rynkowej ceny ryzyka.

Celem niniejszego opracowania jest dogłębna analiza jednoczynnikowych wersji modeli Vasička i CIR pod kątem ich przydatności do zastosowań empirycznych, w tym w szczególności do uzyskiwania informacji na temat oczekiwań inwestorów, dotyczących przyszłych stóp procentowych, jak również stopnia ich awersji do ryzyka. Badania, dokonane przy wykorzystaniu danych z krajowego rynku obligacji skarbowych, obejmowały wiele etapów. W pierwszym kroku dokonano oszacowania implikowanej krótkoterminowej stopy procentowej rynku obligacji. Uzyskany szereg czasowy posłużył do estymacji parametrów obu modeli w mierze rzeczywistej. Oszacowanie rynkowej ceny ryzyka wymagało dopasowania obu modeli do obserwowanej struktury terminowej. Znajomość wszystkich parametrów modeli pozwoliła na wyznaczenie krzywych dyskontowych. Następnie dokonano analizy rozkładów krótkookresowej stopy procentowej, generowanych

* Autor pragnie wyrazić podziękowanie Pawłowi Przesmyckiemu z Departamentu Systemu Finansowego NBP za liczne konsultacje oraz pomoc w uzyskaniu danych.

¹ Zob. np. Rebonato (1998), James i Webber (2000), Brigo i Mercurio (2001).

² Jednym z nielicznych wyjątków jest praca Rebonato (1998), gdzie na podstawie przytoczonych badań przedstawiono szczegółowe studium obu modeli.

przez oba modele. W szczególności porównano własności rozkładów w mierze rzeczywistej oraz w mierze neutralnej względem ryzyka, jak również omówiono różnice między rozkładami warunkowymi i bezwarunkowymi.

Układ opracowania jest następujący. W części drugiej przybliżone zostały podstawowe założenia teoretyczne oraz własności modeli. Część trzecia obejmuje zagadnienia związane z empiryczną analizą modeli. Omówiono w niej ogólnie stosowane sposoby estymacji współczynników, jak również opisano procedurę oszacowania parametrów zastosowaną w niniejszym opracowaniu. Szczegółowej interpretacji, w kontekście wydarzeń na krajowym rynku obligacji, poddano ewolucję rynkowej ceny ryzyka. Ponadto przeprowadzono analizę prognoz wynikowych krótkoterminowych stóp procentowych drogą konstrukcji rozkładów prawdopodobieństwa. W części czwartej znajduje się podsumowanie analizy.

Własności modeli Vasicka oraz CIR

Model Vasicka

Własności procesu krótkoterminowej stopy procentowej

W modelu Vasicka proces chwilowej stopy procentowej w rzeczywistej mierze prawdopodobieństwa³ opisany jest stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dZ \quad (1)$$

Parametry a , b oraz σ są stałe. Przy założeniu $T \geq t$ rozwiązanie (1) ma postać:

$$r_T = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dZ_s \quad (2)$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze rzeczywistej jest funkcją gaussowską:

$$p(r_T | r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V[r_T | r_t]}} \exp \left\{ -\frac{(r_T - E[r_T | r_t])^2}{2V[r_T | r_t]} \right\} \quad (3)$$

o warunkowym rozkładzie normalnym, o średniej i wariancji odpowiednio:

$$\begin{aligned} E[r_T | r_t] &= b + e^{-a(T-t)}(r_t - b) \\ V[r_T | r_t] &= \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(T-t)}] \end{aligned} \quad (4)$$

Rynkowa cena ryzyka w modelu Vasicka jest stałym parametrem:

$$\lambda(r, t) = \lambda \quad (5)$$

Dostosowanie (1) do procesu w mierze neutralnej względem ryzyka następuje poprzez przekształcenie parametru b , określającego „średni”, długoterminowy poziom stopy procentowej:

$$b^* = b - \frac{\sigma\lambda}{a} \quad (6)$$

Parametry a oraz σ pozostają niezmienione. Gęstość warunkowa procesu w mierze neutralnej względem ryzyka jest identyczna z (3) przy uwzględnieniu przekształcenia (6).

Cena obligacji zerokuponowej

Cena obligacji zerokuponowej w modelu Vasicka jest funkcją chwilowej stopy procentowej r , czasu kalendarzowego t oraz terminu zapadalności T ; $P = (r, t, T)$. Opisuje ją następująca analityczna formuła:

$$P(r, t, T) = B(t, T) e^{-rA(t, T)} \quad (7)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\ B(t, T) &= \exp \left\{ \frac{[A(t, T) - (T-t)] \left(a^2 b - a\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) - [\sigma A(t, T)]^2}{a^2} - \frac{[\sigma A(t, T)]^2}{4a} \right\} \end{aligned}$$

Formułę (7) można zastosować pod warunkiem znajomości parametrów procesu chwilowej stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka: α , β , σ oraz λ . Problem estymacji parametrów zostanie omówiony w dalszej części opracowania.

Model CIR

Własności procesu krótkoterminowej stopy procentowej

Proces chwilowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej opisany jest stochastycznym równaniem różniczkowym o postaci:

³ Miara prawdopodobieństwa jest pojęciem z zakresu probabilistyki. Koncepcje miary rzeczywistej (fizycznej) oraz neutralnej względem ryzyka leżą u podstaw tzw. martyngałowej teorii wyceny instrumentów finansowych. Najogólniej, wartość instrumentu finansowego jest równa oczekiwanej wartości zdyskontowanej wypłaty związanej z tym instrumentem, wyznaczonej w mierze prawdopodobieństwa neutralnej względem ryzyka. Obszerne omówienie martyngałowej teorii wyceny znaleźć można m.in. w: Duffie (2001).

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dZ \quad (8)$$

Podobnie jak w modelu Vasicka, parametry a , b oraz σ są stałe. Czynnikiem istotnie różniącym model CIR od modelu Vasicka jest fakt, że wariancja procesu stopy procentowej jest zależna od poziomu r . Cecha ta pozwala na uchwycenie często obserwowanej dodatniej zależności pomiędzy poziomem stóp procentowych a ich zmiennością. Stochastyczny proces opisany równaniem (8) jest znany jako proces Feller. Przy założeniu $T \geq t$ rozwiązanie (8) ma postać:

$$r_T = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)} + \sigma e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(s-t)} \sqrt{r_s} dZ_s \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E[r_T | r_t] &= b + e^{-a(T-t)}(r_t - b) \\ V[r_T | r_t] &= r_t \frac{\sigma^2}{a} [e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}] + b \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-a(T-t)}]^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze rzeczywistej ma postać:

$$p(r_T | r_t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}) \quad (11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2a}{\left\{\sigma^2 [1 - e^{-a(T-t)}]\right\}} \\ u &= cr_t e^{-a(T-t)} \\ v &= cr_T \\ q &= \left(\frac{2ab}{\sigma^2}\right) - 1 \end{aligned}$$

przy czym I_q oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rzędu q . Rozkład warunkowy⁴ jest postaci χ^2 (rozkład niecentrowany) o liczbie stopni swobody $2q+2$ oraz parametrze mierzącym „niecentralność” rozkładu równym $2u$:

$$F(r_T | r_t) \sim \chi^2 [2cr(T); 2q + 2; 2u]$$

Konsekwencją założenia dodatniej korelacji między poziomem stopy procentowej a jej zmiennością jest fakt, że rynkowa cena ryzyka – w odróżnieniu od modelu Vasicka – również jest funkcją stopy procentowej:

$$\lambda(r, t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r} \quad (12)$$

przy czym λ jest stałym parametrem.

Dostosowanie (8) do procesu w mierze neutralnej względem ryzyka następuje poprzez przekształcenie

zarówno współczynnika wyznaczającego średni poziom stopy, jak i parametru odpowiedzialnego za szybkość powrotu do średniej. W szczególności:

$$\begin{aligned} a^* &= a + \lambda \\ b^* &= \frac{ab}{a + \lambda} \end{aligned} \quad (13)$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze neutralnej względem ryzyka ma postać identyczną z (11), z tym że do jej wyznaczenia wykorzystane są parametry procesu przekształcone zgodnie z (13).

Cena obligacji zerokuponowej

Model CIR, podobnie jak model Vasicka, opisuje w postaci analitycznej formuły cenę obligacji zerokuponowej w zależności od poziomu krótkoterminowej stopy procentowej, czasu kalendarzowego oraz terminu zapadalności obligacji:

$$P(r, t, T) = B(t, T) e^{-rA(t, T)} \quad (14)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{2[e^{\delta(T-t)} - 1]}{(\delta + a + \lambda)[e^{\delta(T-t)} - 1] + 2\delta} \\ B(t, T) &= \left\{ \frac{2\delta \exp\left[\frac{(\delta + a + \lambda)(T-t)}{2}\right]}{(\delta + a + \lambda)[e^{\delta(T-t)} - 1] + 2\delta} \right\}^{2ab/\sigma^2} \\ \delta &= \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Analiza empiryczna

Estymacja parametrów modeli na podstawie szeregów czasowych oraz danych przekrojowych

Znajomość analitycznych formuł, opisujących warunkowy rozkład krótkoterminowej stopy procentowej, pozwala w procesie estymacji parametrów obu modeli wykorzystać jedną z metod stosowanych w ekonometrii szeregów czasowych. Zbiorem danych jest w takim przypadku szereg czasowy stopy procentowej o określonym stałym (krótkim) terminie zapadalności. Znajomość analitycznych wzorów, opisujących ceny obligacji zerokuponowych, pozwala z kolei na wykorzystanie metody optymalizacji nieliniowej. W takim przypadku zbiór danych stanowią ceny lub stopy dochodowości obligacji o różnych terminach zapadalności, obserwowane w określonym momencie. W praktyce okazuje się, że z tymi różnymi metodami estymacji parametrów wiążą się pewne niedogodności. Główną wadą metody wykorzystującej dane przekrojowe jest brak sposobu

⁴ Zob.: James i Webber (2000), s. 506.

zapewniającego stabilność parametrów estymowanych na podstawie danych z różnych momentów czasowych. Jest to sprzeczne z podstawowymi własnościami obu modeli, które postulują niezmiennosc parametrów w czasie. Głównie z tego powodu w opisywanym badaniu zrezygnowano z estymacji parametrów w mierze fizycznej na podstawie danych przekrojowych.

Opisywane w literaturze sposoby estymacji parametrów modeli jednoczynnikowych na podstawie szeregu czasowego krótkookresowej stopy procentowej ograniczają się do metody największej wiarygodności (ang. Maximum Likelihood, dalej w tekście ML) oraz uogólnionej metody momentów (ang. Generalised Method of Moments, dalej w tekście GMM). W kontekście rozważanych modeli pierwszy z wymienionych sposobów jest bardziej efektywny – wykorzystuje bowiem informacje na temat ogólnej postaci funkcji warunkowej gęstości (która w obu przypadkach jest znana), a nie tylko jej momentów. Praktyczne zastosowanie ML do estymacji modelu CIR jest jednak utrudnione. Dzieje się tak ze względu na własności numeryczne funkcji Bessela, zależnej od estymowanych parametrów, która stanowi jeden ze składników funkcji gęstości warunkowej⁵. Trudno zwłaszcza dobrać takie wartości startowe parametrów, które nie powodowałyby „eksplozji” funkcji Bessela. GMM, mimo że nie pozwala na pełne wykorzystanie informacji na temat funkcji gęstości, w przypadku modelu CIR okazuje się znacznie łatwiejsza do zastosowania.

Estymacji parametrów modelu Vasička dokonano metodą największej wiarygodności, natomiast w celu oszacowania parametrów modelu CIR wykorzystano metodę momentów w wersji zaproponowanej przez Chana i in. (1992).

Szereg czasowy krótkoterminowej stopy procentowej

Do estymacji parametrów procesu krótkookresowej stopy procentowej najczęściej wykorzystywane są dane z rynku pieniężnego – takiego, na którym przedmiotem obrotu są instrumenty o terminie zapadalności do jednego roku. W badaniu autorstwa Chana i in. (1992) posłużono się stopami dochodowości jednomiesięcznych bonów skarbowych. Hördaahl (2000) do estymacji parametrów procesu zmienności w modelu Longstaffa-Schwartz wykorzystuje dane dotyczące trzymiesięcznych bonów skarbowych na rynku szwedzkim. W badaniu autorstwa Szczepaniaka (2002) przedmiotem analizy są stopy depozytów overnight na krajowym rynku pieniężnym.

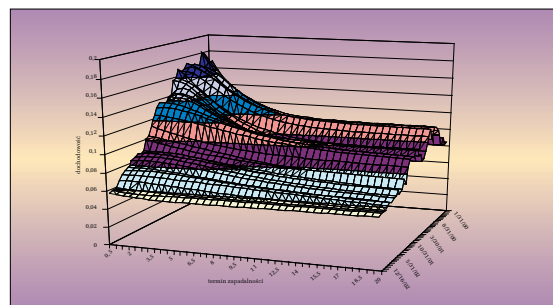
Celem dwóch z przytoczonych opracowań (Chana i in., 1992 oraz Szczepaniaka, 2002) jest zasadniczo badanie dynamicznych własności krótkookresowych

stóp procentowych. Dobór danych w każdym z powyższych przypadków jest zatem oczywisty. Niniejsze opracowanie, w odróżnieniu od wyżej cytowanych, ma na celu ocenę przydatności modeli Vasička oraz CIR do analizy rynku obligacji. Rynek pieniężny oraz rynek obligacji mimo oczywistych związków stanowią odrębne segmenty rynku finansowego, na które wpływają różne czynniki ryzyka. Stosowanie danych z rynku pieniężnego do estymacji parametrów modeli służących do wyceny obligacji wydaje się zatem kontrowersyjne⁶.

Centralnym elementem obu rozważanych modeli jest jednak proces krótkookresowej (faktycznie chwilowej) stopy procentowej. Problem nosi znamiona paradoksu: konieczne jest „odnalezienie” na rynku obligacji (instrumentów o pierwotnym terminie zapadalności powyżej roku) informacji o stopach dochodowości o arbitralnie krótkim terminie zapadalności – najlepiej takich, które spełniają warunek: $r(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$. Rozwiązaniem tego problemu, postulowanym w niniejszym opracowaniu, jest wykorzystanie modelu Svenssona (1994). W modelu tym stopy dochodowości obligacji zerokuponowych, obserwowane w chwili t , są funkcją terminu zapadalności τ :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} \right] + \mu_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} \right] + \mu_4 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right)}{\frac{\tau}{\tau_2}} \right] \quad (15)$$

Wykres 1 Model Svenssona - ewolucja krzywych zerokuponowych (listopad 1999 r. - grudzień 2002 r.)

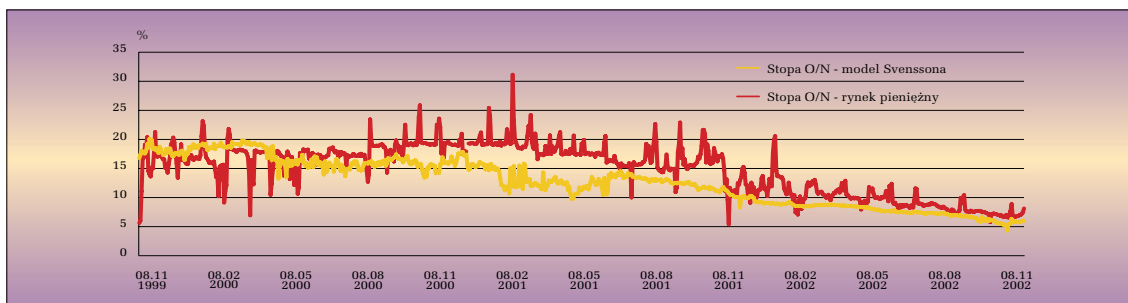


Źródło: opracowanie własne

⁵ Hördaahl (2000) opisuje problemy związane z numerycznymi własnościami funkcji Bessela w kontekście estymacji dwuczynnikowego modelu Longstaffa-Schwartz. Szerzej na ten temat zob. również: Rebonato (1998).

⁶ Wydaje się, że fundamentalne znaczenie w tym względzie ma właśnie kwestia różnic między czynnikami ryzyka właściwymi dla obu segmentów. W szczególności możliwa jest estymacja parametrów procesu krótkookresowej stopy procentowej w mierze fizycznej na podstawie danych z rynku pieniężnego. Jednak szacowanie rynkowej ceny ryzyka z wykorzystaniem tych parametrów na podstawie przekrojowych danych z rynku obligacji nosi znamiona braku konsekwencji. Wycena instrumentów finansowych (w szczególności obligacji) na podstawie modeli skalibrowanych w tak niespójny sposób wydaje się mało przydatna.

Wykres 2 Stopa O/N rynku pieniężnego oraz wynikowa stopa O/N na podstawie modelu Svenssona



Źródło: opracowanie własne

Estymacja parametrów $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \tau_1$ oraz τ_2 dokonywana jest najczęściej metodą optymalizacji nieliniowej (dopasowanie do danych przekrojowych: cen lub dochodowości obligacji obserwowanych na rynku). W istocie model Svenssona pozwala na wygodne opisanie danych z rynku obligacji za pomocą sześciu parametrów. Umożliwia zatem rozwiązanie wyżej wspomnianego paradoksu: za jego pomocą możliwe jest uzyskanie z rynku obligacji danych dotyczących (implikowanej) chwilowej stopy procentowej.

Zbiór danych, na podstawie których dokonano estymacji modelu Svenssona, obejmował dzienne obserwacje cen obligacji będących przedmiotem obrotu na krajowym rynku międzybankowym w okresie od 8 listopada 1999 r. do 16 grudnia 2002 r.⁷ Wykres 1 przedstawia zerokuponowe krzywe dochodowości, skonstruowane na podstawie oszacowanych parametrów modelu.

Do wyznaczenia szeregu czasowego „chwilowej” stopy procentowej przyjęto okres trwania równy jednemu dniu, wyrażonemu jako ułamek roku, $\tau = 1/250^8$. Skonstruowany zbiór danych można zatem interpretować jako szereg wynikowych stóp overnight (O/N), wyznaczonych dla rynku obligacji skarbowych.

Wykres 2 doskonale obrazuje podstawową przyczynę wykorzystywania w badaniu wynikowych stóp O/N na podstawie modelu Svenssona zamiast stóp O/N rynku pieniężnego. Te ostatnie podlegają wahaniom w zależności od tego, czy na rynku pieniężnym występuje względny nadmiar czy niedobór płynności. Gwałtowne zmiany stopy O/N obserwowane są zwłaszcza pod koniec okresu rozliczeniowego, w trakcie którego banki są zobowiązane do utrzymywania na rachunkach bieżących uśrednionego poziomu rezerw. Stopy O/N rynku pieniężnego pozostają pod silnym wpływem czynników związanych z popytem na płynność oraz jej podażą. Tym samym nie wydają się właściwe do kon-

strukcji modeli wyceny obligacji. Wpływ takich czynników, jak np. oczekiwania inflacyjne, oczekiwania dotyczące krótkookresowych stóp procentowych bądź oczekiwania dotyczące podaży instrumentów skarbowych, jest w przypadku obligacji znacznie silniejszy niż wpływ bieżących wydarzeń na rynku pieniężnym⁹. Nie należy jednocześnie ignorować faktu, że (jak wskazuje chociażby wykres 2) współzależność stóp rynku pieniężnego oraz stóp rynku obligacji jest znaczna. Zjawisko to spowodował jednak fakt, że na oba segmenty rynku finansowego od 2001 r. działały czynniki powodujące stopniową redukcję stóp. W przypadku rynku pieniężnego pierwszorzędne znaczenie miał cykl obniżek stóp banku centralnego, który został zapoczątkowany w lutym 2001 r. Z kolei do spadku stóp rentowności obligacji przyczyniły się przede wszystkim oczekiwania na obniżki stóp NBP. Od sierpnia 2001 r. na pierwszy plan wysunęły się efekty tzw. convergence play – strategii inwestycyjnej, związanej z oczekiwaniami na stopniowe dostosowanie kształtu polskiej krzywej dochodowości do kształtu krzywej właściwego dla strefy euro, wraz z postępem procesów integracji Polski z Unią Europejską. Oczekiwania te nasiliły się w obliczu znacznych postępów negocjacyjnych, jakie strona polska poczyniła w 2002 r.

Drugi etap badania obejmował estymację parametrów modeli Vasíčka oraz CIR na podstawie wyżej omówionego szeregu czasowego implikowanych stóp O/N. Estymacji dokonano w ruchomym „oknie”: parametry na dzień t szacowano na podstawie obserwacji z przedziału $\langle t - 249; t \rangle$. Przesłanką takiego zabiegu było dążenie, aby wyceny obligacji dokonywać na podstawie zbiorów danych o identycznej długości. Liczbę 250 obserwacji przyjęto jako wariant kompromisowy. Z jednej strony konieczne bowiem było zapewnienie odpowiednio długiego szeregu czasowego. Z drugiej strony należało również uwzględnić efekt „krótkiej pamięci” rynków finansowych, który powoduje, że w procesie wyceny instrumentów finansowych ważną rolę odgrywają jedynie dane historyczne ze stosunkowo nieodległej przeszłości¹⁰.

⁷ Informacje na temat cen obligacji zostały zaczerpnięte z bazy danych Departamentu Operacji Krajowych NBP.

⁸ Przyjęto założenie, że rok ma 250 dni roboczych.

⁹ Twierdzenie o zupełnym braku zależności między rynkiem obligacji a rynkiem pieniężnym byłoby jednak błędne. Pozycje w skarbowych papierach wartościowych są bowiem finansowane za pomocą instrumentów takich, jak depozyty, swapy walutowe oraz transakcje repo, będące przedmiotem obrotu na rynku pieniężnym.

¹⁰ Obserwacja ta ma charakter heurystyczny i nie została zweryfikowana drogą badań empirycznych.

Poważnym problemem, związanym z przyjęciem ruchomego „okna obserwacji”, jest implícite zniesienie podstawowego założenia o braku zmienności w czasie parametrów procesu chwilowej stopy procentowej w obu modelach. Jak wskazują wyniki estymacji, omówione w dalszej części opracowania, problem ten wprawdzie występuje, jednak nie przejawia się szczególnie brakiem stabilności parametrów w krótkich okresach. W dalszym ciągu, kierując się względami pragmatycznymi, jako podstawowe kryterium oceny jakości dopasowania modeli do danych przyjęto statystyczne własności oszacowań.

Estymacja rynkowej ceny ryzyka

Estymacja modeli na podstawie obserwowanego szeregu czasowego krótkookresowej stopy procentowej pozwala na oszacowanie parametrów procesu w mierze fizycznej. Wycena instrumentów finansowych (w szczególności obligacji) w rozważanych modelach wymaga z kolei znajomości parametrów procesu w mierze wolnej od ryzyka, które zależą m.in. od wartości λ (por. równania (6) oraz (13)). Zalecanym w literaturze rozwiązaniem problemu jest oszacowanie rynkowej ceny ryzyka na podstawie danych przekrojowych (zob. na ten temat m.in. Ait-Sahalia, 1996). Problem polega na minimalizacji sumy kwadratów różnic między obserwowanymi a teoretycznymi cenami instrumentów finansowych:

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \sum_{\tau} (P^{obs}(\tau) - P^{teoret}(\tau))^2 \quad (16)$$

W obu przypadkach za $P^{obs}(\tau)$ podstawiono wek-

¹¹ W tym celu posłużono się prostym przekształceniem formuły (15):

$$P_t = \exp(-R(t)\tau).$$

¹² Większa „gęstość” t (0,1 roku) na odcinku do 1 roku, wobec 0,5 roku na odcinku powyżej 1 roku do 10 lat była podyktowana dążeniem do możliwie wiernego odwzwierciedlenia kształtu krótkiego końca krzywej zerokuponowej Svenssona (wobec problemów związanych z jego stabilnością). Ze względu na bardzo płytki rynek wtórny obligacji WS0922 (do końca 2002 r. odbyły się dwa przetargi obligacji tej serii i w ich wyniku na rynek wtórny trafiły obligacje o wartości nominalnej jedynie 1,4 mld PLN) zdecydowano o wykorzystaniu odcinka krzywej do 10 lat.

tor 28 teoretycznych cen obligacji zerokuponowych, wyznaczonych na podstawie modelu Svenssona¹¹, o terminach zapadalności $\tau = [0,1; 0,2; \dots; 1; 0; 1,5; 2; 0; \dots, 10,0]$ ¹². Za $P^{teoret}(\tau)$ podstawione zostały teoretyczne ceny obligacji zerokuponowych, odpowiednio (7) w przypadku modelu Vasička oraz (14) w przypadku modelu CIR. W obu przypadkach do wzorów na ceny obligacji $P^{teoret}(\tau)$ podstawione zostały oszacowane wartości parametrów w mierze rzeczywistej. Problem sprowadzał się zatem do minimalizacji wyrażenia (16) ze względu na parametr λ .

Wyniki obliczeń¹³

Rynkowa cena ryzyka – oszacowania oraz interpretacja

Wykres 3 przedstawia oszacowania rynkowej ceny ryzyka w obu modelach, opisanej formułami odpowiednio (5) oraz (12). W dalszej artykule dokonano interpretacji ewolucji rynkowej ceny ryzyka w kontekście wydarzeń, które w analizowanym okresie miały wpływ na ceny obligacji na krajowym rynku międzybankowym.

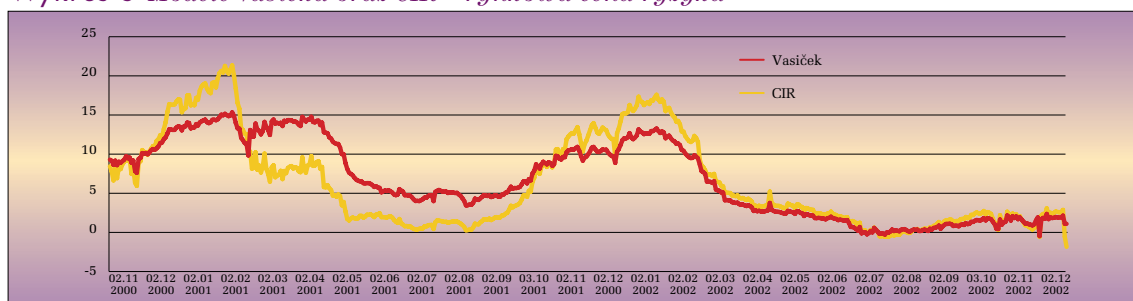
Przełom lat 2000 i 2001

Pod koniec 2000 r. wśród inwestorów dominowało przekonanie o tym, że Rada Polityki Pieniężnej w obliczu oznak osłabienia dynamiki gospodarczej zdecyduje o złagodzeniu nastawienia w polityce pieniężnej. Pierwsze sygnały potwierdzające te oczekiwania pojawiły się pod koniec roku. Nie przyjęły one jednak formy oczekiwanych przez rynek obniżek stóp procentowych – w grudniu Rada Polityki Pieniężnej ogłosiła zmianę nastawienia w polityce monetarnej z restrykcyjnego na neutralne. Pierwsza decyzja o cięciu stóp procentowych została podjęta pod koniec lutego 2001 r.

¹³ W niniejszym opracowaniu przedstawiono jedynie oszacowania rynkowej ceny ryzyka obu modeli. Pełny zestaw oszacowań wszystkich parametrów, jak również ich własności statystyczne, są dostępne u autora.

¹⁴ Według danych Ministerstwa Finansów, wysokość deficytu budżetowego w lutym 2001 r. stanowiła 58,2% kwoty planowanej na cały rok. Analogiczna wielkość w marcu sięgała już 73,3%.

Wykres 3 Modele Vasička oraz CIR – rynkowa cena ryzyka



Źródło: opracowanie własne

Ostrożność w zmianie kierunku polityki pieniężnej członkowie RPP motywowali m.in. niedostateczną restrykcyjnością polityki fiskalnej. Uczestnicy rynku obligacji, mając świadomość skali zagrożeń związanych z realizacją ustawy budżetowej w 2001 r.¹⁴ oraz znając stanowisko RPP w tej kwestii, stopniowo nabierali przekonania, że tempo oraz skala cięć stóp procentowych nie będą takie, jak wskazywałaby kondycja gospodarki. W konsekwencji, dokonywali oni rewizji swoich wcześniejszych oczekiwań co do tempa obniżek stóp procentowych banku centralnego.

Trudna sytuacja budżetowa była postrzegana nie tylko przez pryzmat polityki pieniężnej. Kłopoty z realizacją budżetu oznaczały konieczność emisji skarbowych papierów wartościowych. Oczekiwany przez inwestorów wzrost podaży obligacji był istotnym czynnikiem odpowiedzialnym za stopniowe spłaszczanie zerokuponowej krzywej dochodowości w pierwszej połowie 2001 r. (widoczne na wykresie 1).

W świetle powyższego, wzrost rynkowej ceny ryzyka, obserwowany na przełomie lat 2000 oraz 2001 r. (por. wykres 3), interpretowany jest jako odzwierciedlenie zwiększenia niepewności inwestorów co do tempa i skali obniżek stóp procentowych, jak również obaw związanych ze spodziewaną zwiększoną podażą skarbowych papierów wartościowych.

Przełom lat 2001 i 2002

Podobny przebieg miały zjawiska, które wpływały na rynek obligacji na przełomie lat 2001 oraz 2002. Również wówczas silne oczekiwania na kolejne cięcia stóp procentowych banku centralnego uległy stopniowej korekcie. Ponownie nasiliły się obawy przed zwiększoną podażą obligacji.

Dodatkowym czynnikiem zwiększającym ryzyko inwestowania na rynku polskim był kryzys finansowy i gospodarczy w Argentynie, który bardzo szybko przerodził się w ostry konflikt społeczno-polityczny. Sytuacja w Argentynie wzmogła awersję do ryzyka inwestorów angażujących kapitał portfelowy w innych krajach grupy tzw. emerging markets, do których zaliczają Polskę.

W konsekwencji w omawianym okresie ponownie wystąpił znaczny wzrost rynkowej ceny ryzyka.

Rok 2002

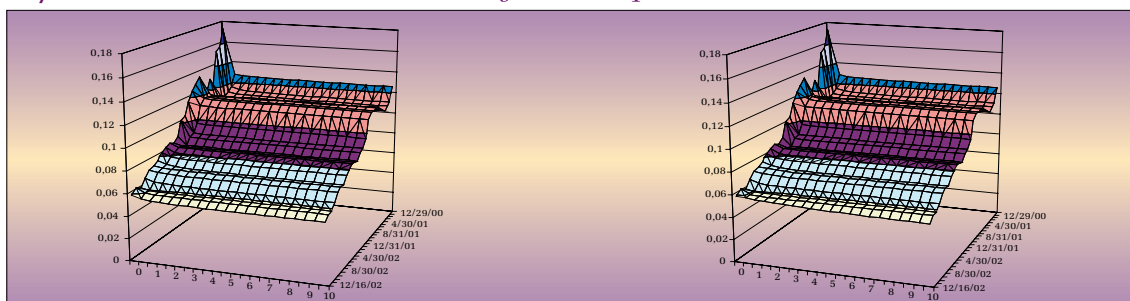
W 2002 r. na krajowym rynku obligacji z całą mocą ujawniły się konsekwencje strategii stosowanej przez zagranicznych inwestorów, znanej jako convergence play. Polega ona na nabywaniu długoterminowych papierów skarbowych w krajach kandydujących do Unii Europejskiej. Perspektywy członkostwa w UE rodzą (racjonalne) oczekiwania stopniowego obniżania się stóp procentowych w krajach kandydackich do poziomów właściwych dla strefy euro. W przypadku papierów skarbowych spadek ich rentowności jest równoznaczny ze wzrostem ich cen, a tym samym oznacza zyski dla inwestorów, którzy posiadają takie instrumenty w swoich portfelach. Zjawisko convergence play, znane z doświadczeń wcześniejszych krajów kandydackich (w szczególności Włoch i Hiszpanii), było powszechnie oczekiwane również w przypadku krajów Europy Środkowej i Wschodniej i ostatecznie przybrało charakter samospełniającej się prognozy.

Pierwsze oznaki convergence play zaobserwowano już w sierpniu 2001 r. Dopiero jednak z perspektywy późniejszych wydarzeń na rynku obligacji możliwe było dokonanie pełniejszej oceny przyczyn gwałtownej aprecjacji polskich skarbowych papierów wartościowych. Stało się jasne, że tendencja zapoczątkowana w połowie 2001 r. została wywołana czynnikiem o fundamentalnym znaczeniu, którym były oczekiwania przyjęcia Polski do Wspólnoty Europejskiej.

Wzrostowe tendencje cen obligacji podtrzymywane były w 2002 r. korzystnymi informacjami na temat postępów w zamykaniu kolejnych rozdziałów negocjacyjnych w rokowaniach dotyczących warunków przyjęcia Polski do Unii Europejskiej. W czwartym kwartale niezwykle istotnym czynnikiem redukującym ryzyko stał się pozytywny wynik październikowego referendum w Irlandii, które formalnie miało zadecydować o przyjęciu przez Irlandczyków postanowień Traktatu Nicejskiego, natomiast faktycznie stanowiło o przyszłości postępów integracyjnych. W listopadzie 2002 r. ogłoszono formalną datę przyjęcia krajów kandydujących do Unii (1 maja 2004 r.). Uwieńczeniem negocjacji było oficjalne zaproszenie krajów kandydackich, wystosowane do ich przedstawicieli podczas szczytu w Kopenhadze w grudniu 2002 r.

¹⁵ Najlepszym dowodem był fakt, że przedłużający się kryzys argentyński nie miał w ciągu 2002 r. istotnego wpływu na zachowania inwestorów zagranicznych w Polsce i innych krajach kandydackich.

Wykres 4 Modele Vasicka oraz CIR - krzywe zerokuponowe



Źródło: opracowanie własne

Perspektywa rychłego członkostwa Polski w Unii Europejskiej, w świetle opisanych wyżej wydarzeń, stała się realna. Gwałtownie obniżyło się ryzyko polityczne Polski, postrzegane przez inwestorów zagranicznych. Radykalnie zmienił się status Polski, jak również dziewięciu pozostałych krajów kandydackich, na tle innych państw z grupy emerging markets¹⁵.

Ta strukturalna zmiana znalazła odbicie w ewolucji parametrów omawianych modeli. W szczególności znacznie obniżyła się rynkowa cena ryzyka. W przypadku modelu Vasička parametr ten osiągnął historycznie niski poziom.

Zerokuponowe krzywe dochodowości

Znajomość parametrów procesu chwilowej stopy procentowej w mierze wolnej od ryzyka pozwala na wyznaczenie, w obu rozważanych modelach, zerokuponowych krzywych dochodowości (wykres 4).

Uzyskane oszacowania zerokuponowych krzywych dochodowości charakteryzują się dwiema podstawowymi cechami. Po pierwsze, w obu przypadkach są zasadniczo identyczne. Kształt krzywych, jak również ich ewolucja w czasie są praktycznie takie same bez względu na to, czy do ich oszacowania zostanie wykorzystany model Vasička, czy CIR.

Drugą interesującą cechą jest to, że w obu wypadkach krzywe zerokuponowe przybierają płaski kształt dla nieodległych terminów zapadalności. W większości przypadków krzywe stają się faktycznie „prostymi” po terminie zapadalności τ równym 0,5 roku – 1 rok.

Płaski kształt krzywych oznacza, że ich przesunięcia praktycznie na całej długości są równoległe. Własność ta, zgodna z teoretycznymi przewidywaniami dotyczącymi modeli jednoczynnikowych, nie odpowiada faktycznie obserwowanej dynamice krzywych zerokuponowych. Warto w tym kontekście przypomnieć sytuację, która powstała na krajowym rynku obligacji w pierwszych miesiącach 2001 r. Inwestorzy dokonali wówczas znacznej rewizji swoich oczekiwań dotyczących tempa i skali obniżki stóp procentowych banku centralnego, co znalazło odzwierciedlenie w postaci stopniowego spłaszczania się zerokuponowej krzywej dochodowości. Efekt ten uwidocznił się w kształcie krzywych na podstawie modelu Svenssona. Własności modeli Vasička oraz CIR uniemożliwiają uchwycenie tego zjawiska.

Rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej w modelach Vasička oraz CIR

Jak wskazano w części teoretycznej opracowania, w obu przypadkach znana jest analityczna postać funkcji warunkowej gęstości krótkoterminowej stopy procentowej. Znajomość parametrów procesu stopy pozwala zatem na wyznaczenie jej wynikowych rozkładów w określonym momencie w przyszłości. Własność

ta wydaje się – pozornie – atrakcyjna pod względem analitycznych zastosowań obu modeli. Praktyczne jej wykorzystanie nie jest jednak pozbawione ograniczeń.

Interpretacja rozkładów

Hördahl (2000) przedstawił metodę wykorzystania dwuczynnikowego modelu Longstaffa-Schwartza do estymacji wynikowych funkcji gęstości krótkoterminowej stopy procentowej. O ile zaproponowana metodologia nie budzi zastrzeżeń, o tyle interpretacja uzyskanych wyników, którą przedstawił autor, rodzi wątpliwości. Zdaniem Hördahla (2000, s. 14 i dalsze) wynikowe rozkłady uzyskane na podstawie modelu Longstaffa-Schwartza odzwierciedlają oczekiwania uczestników rynku, dotyczące kształtowania się stóp krótkoterminowych w przyszłości. Mogą być zatem stosowane w sytuacjach, w których np. brak rozwiniętego rynku opcji na stopę procentową uniemożliwia wykorzystanie kwotowań opcji do konstrukcji neutralnych względem ryzyka funkcji gęstości stopy procentowej¹⁶.

Kwotowania z rynku opcji są w istocie kształtowane głównie przez oczekiwania uczestników rynku co do realizacji stopy procentowej w przyszłości. Dlatego też interpretacja rozkładów uzyskanych na podstawie takich kwotowań, w kategoriach oczekiwań rynku, nie budzi kontrowersji¹⁷.

Z kolei oszacowanie parametrów procesu krótkoterminowej stopy procentowej jest dokonywane na podstawie danych historycznych. W konsekwencji, wynikowe rozkłady stopy procentowej skonstruowane na podstawie modeli struktury terminowej (bez względu na to, czy są to modele jednoczynnikowe, czy też wieloczynnikowe, jak model Longstaffa-Schwartza) mogą być interpretowane wyłącznie w kategoriach prognoz z modelu, nie zaś jako odzwierciedlenie oczekiwań inwestorów.

Postać funkcji gęstości w modelach Vasička oraz CIR

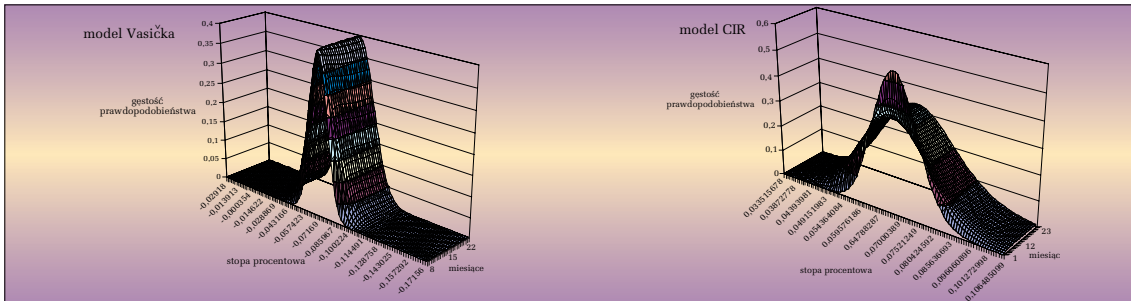
Znajomość analitycznej postaci funkcji gęstości ułatwia konstruowanie warunkowych rozkładów stopy procentowej. Wadą związaną z tą własnością jest jednak niedostateczna elastyczność uzyskanych rozkładów. Gaussowska funkcja gęstości, skonstruowana na podstawie modelu Vasička, generuje rozkład normalny. W zależności od parametrów procesu, prognozowane przyszłe realizacje krótkookresowej stopy procentowej mogą okazać się ujemne¹⁸. Z kolei model CIR generuje rozkład o postaci χ^2 , który wprowadzie nie przypisuje dodatniego prawdopodobieństwa ujemnym realizacjom

¹⁶ Sytuacja taka występuje m.in. na krajowym rynku finansowym.

¹⁷ Metodę tą stosują liczne instytucje finansowe w celu uzyskiwania informacji na temat oczekiwań inwestorów, dotyczących przyszłego kształtowania się stóp procentowych oraz kursów walut.

¹⁸ Ta własność modelu Vasička jest w wielu opracowaniach wskazywana jako jego zasadnicza wada.

Wykres 5 Modele Vasička oraz CIR - warunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej (miara neutralna względem ryzyka, oszacowania modeli z 2.08.2002 r.)



Źródło: opracowanie własne

stopy procentowej, jednak niezmiennie wykazuje prawostronną skośność.

Mała elastyczność wyników rozkładów stanowi ważny argument przeciwko ich interpretacji jako obrazu oczekiwań rynkowych. Symetryczny rozkład skonstruowany na podstawie modelu Vasička, a tym bardziej prawostronnie skośny rozkład generowany na podstawie modelu CIR wydają się mało realistycznym przybliżeniem faktycznych oczekiwań rynkowych w sytuacji, gdy np. inwestorzy spodziewają się obniżki krótkoterminowych stóp procentowych¹⁹.

Warunkowe i bezwarunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej

Wykres 5 prezentuje warunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej, uzyskane na podstawie oszacowań parametrów modeli z 2 sierpnia 2002 r.

Oba procesy krótkoterminowej stopy procentowej są stacjonarne. Oznacza to, że wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy warunkowy rozkład krótkoterminowej stopy procentowej stopniowo staje się zbieżny z rozkładem bezwarunkowym²⁰. W przypadku modelu Vasička momenty rozkładu warunkowego w mierze rzeczywistej są opisane wzorami (4). Na ich podstawie można wyznaczyć momenty rozkładu bezwarunkowego:

$$\begin{aligned} E[r] &= \lim_{(T-t) \rightarrow \infty} E[r_T | r_t] = b \\ V[r] &= \lim_{(T-t) \rightarrow \infty} V[r_T | r_t] = \frac{\sigma^2}{2a} \end{aligned} \quad (17)$$

Analogicznie, w przypadku modelu CIR przy wykorzystaniu formuł (10) możliwe jest wyznaczenie momentów rozkładu bezwarunkowego w mierze rzeczywistej:

$$\begin{aligned} E[r] &= \lim_{(T-t) \rightarrow \infty} E[r_T | r_t] = b \\ V[r] &= \lim_{(T-t) \rightarrow \infty} V[r_T | r_t] = b \frac{\sigma^2}{2a} \end{aligned} \quad (18)$$

W obu przypadkach oczekiwana wartość rozkładu bezwarunkowego jest równa długookresowemu poziomowi krótkoterminowej stopy procentowej. Jeżeli zatem poziom stopy w chwili t , w której dokonywana jest prognoza, przewyższa poziom długoterminowy, wówczas prognozowana wartość (mierzona wartością oczekiwaną) obniża się wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy²¹. Jeżeli natomiast stopa w momencie dokonywania prognozy jest niższa od swego długoterminowego poziomu, wówczas obserwowany jest stopniowy wzrost jej oczekiwanej wartości wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy.

Ceteris paribus, szybkość konwergencji rozkładu warunkowego do postaci bezwarunkowej jest dodatnio zależna od wielkości parametru a , który w obu modelach mierzy szybkość powrotu stopy procentowej do jej długookresowego poziomu. Wartość parametru a z dnia 2.08.2002 r., dla którego przedstawiono powyższe rozkłady, była jedną z najniższych oszacowanych w całej próbie. Niemniej, jak wynika choćby z obserwacji wykresów, rozkład warunkowy ulegał bardzo szybkiej konwergencji już dla względnie bliskich horyzontów prognozy. W dniach, w których poziom był większy, konwergencja następowała odpowiednio szybciej.

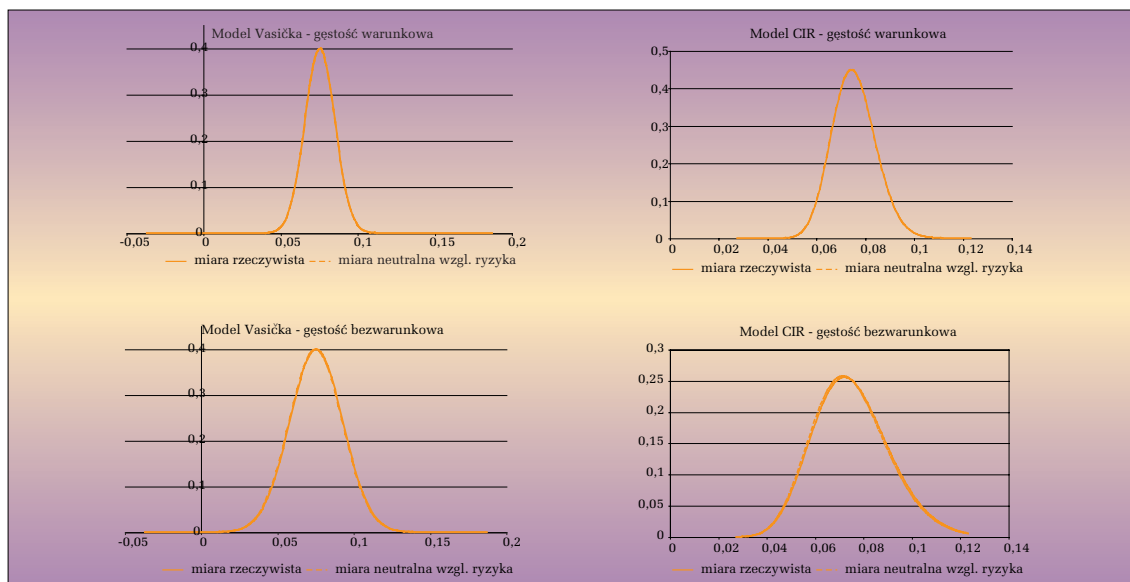
Rozkłady w mierze rzeczywistej oraz w mierze neutralnej względem ryzyka

Jak wspomniano, oszacowania parametru λ zostały dokonane na podstawie danych przekrojowych (dopasowanie teoretycznych cen z modeli Vasička oraz CIR do krzywej zerokuponowej). Oszacowania te (w przeciwieństwie do innych parametrów, szacowanych na podstawie danych historycznych) zawierają zatem informacje na temat oczekiwań uczestników rynku w określonym momencie. Dowodem na słuszność tej tezy jest przedstawiona wyżej interpretacja ewolucji rynkowej ceny ryzyka w kontekście wydarzeń na krajowym rynku obligacji. Jej poziom podlegał w analizowanym okresie znacznym wahaniom. Najwyższa wartość obserwowana była w okresach wzmożonej

¹⁹ W analizowanym okresie sytuacja taka wystąpiła wielokrotnie. Oczekiwania na obniżki nasilały się zwłaszcza w okresach bezpośrednio poprzedzających ogłoszenie decyzji RPP.

²⁰ Własność ta zachodzi dla rozkładów warunkowych zarówno w mierze rzeczywistej, jak i w mierze neutralnej względem ryzyka.

²¹ Sytuacja taka miała m.in. miejsce w dniu, dla którego zaprezentowano oszacowania rozkładów.

Wykres 6 Wynikowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej - niski poziom (λ)

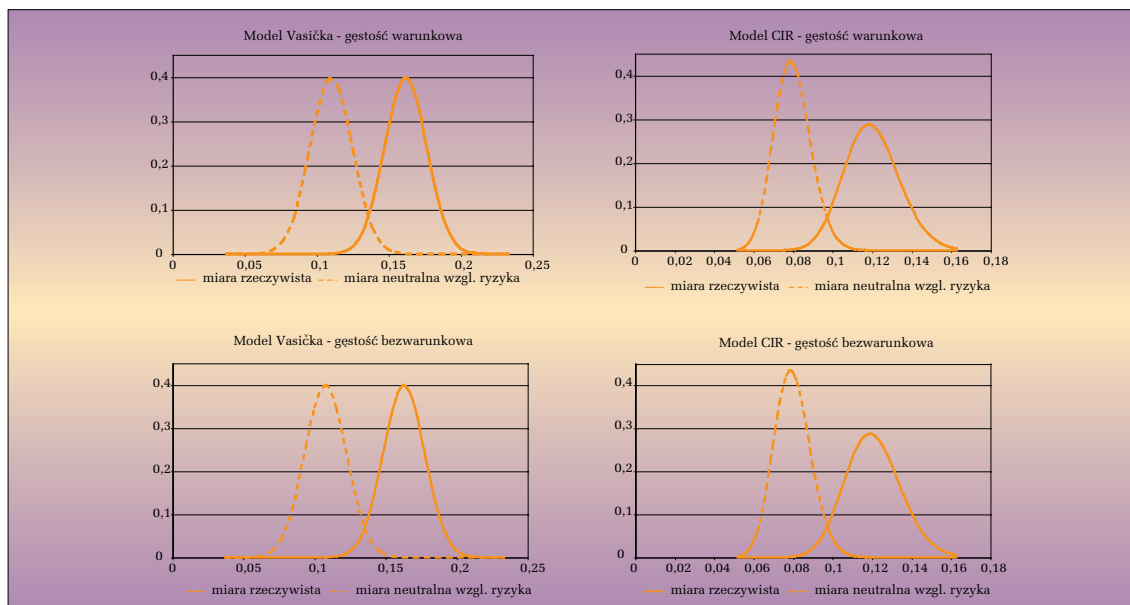
Uwaga: oszacowanie modelu Vasicka z 5.07.2002 r.; oszacowanie modelu CIR z 3.07.2002 r. Rozkład warunkowy szacowany dla horyzontu miesięcznego.
Źródło: opracowanie własne.

niepewności, natomiast dynamiczny spadek zanotowano wraz z urealnieniem perspektyw rychłego członkowania Polski w Unii Europejskiej.

Wspólną cechą modeli Vasicka oraz CIR jest arbitralnie przyjęta postać rynkowej ceny ryzyka, która służy przekształceniu procesu w mierze rzeczywistej w proces w mierze neutralnej względem ryzyka. W modelu Vasicka rynkowa cena ryzyka przyjmuje postać stałego parametru, o który skorygowana jest deterministyczna część procesu stopy procentowej w mierze rze-

czywistej. W konsekwencji, w modelu Vasicka rozkład stopy procentowej w mierze neutralnej różni się od rozkładu w mierze fizycznej jedynie o wartość oczekiwaną, natomiast wariancja pozostaje niezmienną. Z kolei w modelu CIR rynkowa cena ryzyka jest rosnącą funkcją stopy procentowej. W konsekwencji, rozkład w mierze neutralnej różni się od rozkładu w mierze rzeczywistej nie tylko wartością oczekiwaną ale również wariancją. Ogólnie, różnice między rozkładami są tym

²²Szerzej na ten temat zob. Hördahl (2000).

Wykres 7 Wynikowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej - wysoki poziom (λ)

Uwaga: oszacowanie modelu Vasicka z 9.02.2001 r.; oszacowanie modelu CIR z 18.01.2002 r. Rozkład warunkowy szacowany dla horyzontu miesięcznego.
Źródło: opracowanie własne.

znaczniejsze, im wyższy jest poziom rynkowej ceny ryzyka. W szczególnym przypadku zerowa wartość rynkowej ceny ryzyka oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia tzw. hipotezy lokalnych oczekiwań, zgodnie z którą każdy instrument finansowy zapewnia stopę zwrotu równą stopie wolnej od ryzyka. Przyjęcie a priori założenia o zerowym poziomie rynkowej ceny ryzyka²² wydaje się jednak mało realistyczne.

Wykresy 6 oraz 7 przedstawiają rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej oraz w mierze wolnej od ryzyka, skonstruowane na podstawie modeli Vasicka oraz CIR. Dla zobrazowania wpływu wartości parametru λ na wzajemne położenie oraz kształt rozkładów obliczeń dokonano dla dni, w których zanotowano niską wartość λ , jak również dla dni, gdy poziom parametru był wysoki.

Niski poziom rynkowej ceny ryzyka sprawia, że rozkłady stóp procentowych w mierze neutralnej względem ryzyka zasadniczo nie różnią się od rozkładów w mierze rzeczywistej. Własność ta jest niezależna od horyzontu prognozy – dotyczy zarówno rozkładów warunkowych, jak i bezwarunkowych.

Wysoki poziom rynkowej ceny ryzyka niesie konsekwencje w postaci znacznych różnic pomiędzy rozkładami w obu miarach prawdopodobieństwa. W modelu Vasicka, zgodnie z wcześniejszymi uwagami, rozkład w mierze neutralnej względem ryzyka różni się od rozkładu w mierze rzeczywistej jedynie wartością oczekiwaną. Rozkłady są względem siebie przesunięte, jednak nie różnią się wariancją. W modelu CIR natomiast zmiana kształtu rozkładu jest wynikiem transformacji zarówno wartości oczekiwanej, jak i wariancji procesu. Prawidłowości te są obserwowane zarówno w przypadku rozkładów warunkowych, jak i bezwarunkowych.

Podsumowanie

Przedstawione wyniki badań skłaniają do sformułowania czterech podstawowych wniosków. Po pierwsze, stochastyczne równania różniczkowe, stanowiące fundament obu analizowanych modeli, poprawnie oddają zachowanie krótkoterminowej stopy procentowej. Wniosek ten – paradoksalnie – wydaje się słuszny rów-

nież wówczas, gdy obserwowane jest pogorszenie statystycznych własności oszacowań. Zjawisko to jest istotne z punktu widzenia analizy wydarzeń na rynku. Informuje bowiem o działaniu czynników zakłócających efekt „powrotu do średniej”, powodujących kształtowanie się trendów krótkoterminowej stopy procentowej. Co istotne, oszacowania parametrów obu modeli są podobne. Dzieje się tak mimo zastosowania do estymacji współczynników różnych metod. W konsekwencji, krzywe dyskontowe, generowane na podstawie modeli, są niemal identyczne.

Po drugie, szczególnie interesującą własnością modeli okazała się możliwość uzyskania oszacowań rynkowej ceny ryzyka. Analiza ewolucji tego czynnika na tle wydarzeń na rynku obligacji pozwala na poprawną identyfikację okresów, w których zachowania inwestorów cechowała wzmożona awersja do ryzyka.

Po trzecie, rozważane modele nie wydają się przydatne do wyceny instrumentów finansowych. Przyczyną tego jest efekt „spłaszczenia” krzywych dyskontowych, w wyniku którego ceny obligacji o stosunkowo bliskich terminach zapadalności są systematycznie zawyżane, natomiast ceny obligacji o stosunkowo odległych terminach zapadalności – systematycznie zaniżane²³. Geneza tego zjawiska nie jest jasna. Wydaje się, że może mieć ono związek z – na ogół – bardzo szybkim efektem zbieżności warunkowych rozkładów stopy krótkoterminowej w kierunku postaci bezwarunkowej.

Po czwarte, potencjalnie użyteczna jest możliwość konstrukcji rozkładów krótkoterminowej stopy procentowej. Jak podkreślono, projekcji takich nie należy jednak interpretować jako obrazu oczekiwań rynkowych, a raczej jako przybliżone prognozy kształtowania się przyszłych stóp krótkoterminowych, formułowane na podstawie danych historycznych.

Wydaje się, że w celu zniesienia podstawowych ograniczeń modeli Vasicka oraz CIR konieczne jest podjęcie badań wieloczynnikowych modeli terminowej struktury stóp procentowych.

²³ Wycena obligacji, będących przedmiotem obrotu na krajowym rynku międzybankowym potwierdziła tę tezę. Wyniki badania, dostępne u autora, nie zostały – ze względu na ograniczone miejsce – zaprezentowane w niniejszym artykule. Warto również podkreślić, że błędy wyceny okazały się znacznie większe od tych, generowanych przez model Svenssona, który w badaniu traktowany był jako model odniesienia.

Literatura

1. Y. Aït-Sahalia (1996): *Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate*. "Review of Financial Studies" 9, s. 385-426.
2. Y. Aït-Sahalia (2002): *Interest Rate Models: Theory and Practical Applications*. FAME Executive Courses in Finance, Genewa (materiał szkoleniowy).

3. F. Black, E. Derman, W. Toy, (1990): *A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options*. "Financial Analysts Journal" 46, s. 33-39.
4. D. Brigo, F. Mercurio (2001): *Interest Rate Models. Theory and Practice*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.
5. K.C. Chan, G.A. Karolyi, F.S. Longstaff, A.B. Sanders (1992): *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates*. "The Journal of Finance" 47, s. 1209-1228.
6. J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross (1985): *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. "Econometrica" 53, 385-407.
7. D. Duffie (2001): *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
8. D. Heath, R. Jarrow, A. Morton (1992): *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. "Econometrica" 60, s. 77-105.
9. P. Hördahl (2000): *Estimating the Implied Distribution of the Future Short Term Interest Rate Using the Longstaff-Schwartz Model*. Working Paper No. 16, European Central Bank, Frankfurt am Main.
10. J. Hull, A. White (1993): *One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities*. "Journal of Financial and Quantitative Analysis" 28, s. 235-254.
11. J. James, N. Webber (2000): *Interest Rate Modelling*. Wiley, Chichester.
12. *Raport o inflacji* (różne wydania). Rada Polityki Pieniężnej, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
13. R. Rebonato (1998): *Interest Rate Option Models*. Wiley, Chichester.
14. T. Roncalli (1996): *TSM: Advanced Time Series Estimation*. Paris, Global Design (podręcznik wraz z towarzyszącą biblioteką w programie GAUSS).
15. T. Roncalli (1998): *La Structure Par Terme des Taux Zéro: Modélisation et Implémentation Numérique*. Université Montesquieu - Bordeaux IV (rozprawa doktorska wraz z towarzyszącą biblioteką w programie GAUSS).
16. L.E.O. Svensson (1994): *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-94*. Working Paper, International Monetary Fund, s. 114.
17. W. Szczepaniak (2002): *Modele jednoczynnikowe stopy spot na rynku polskim na przykładzie stóp WIBOR*. Materiał prezentowany na I Ogólnopolskiej Konferencji „Prognozowanie Rynków Finansowych”, Uniwersytet Łódzki.
18. O. Vasiček (1977): *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*. "Journal of Financial Economics" 5, s. 177-186.