BANK I KREDYT czerwiec 2003

Modelowanie ryzyka portfela kredytowego

Część II*

Wojciech Kuryłek

W poniższej części artykułu zostaną szczegółowo zaprezentowane podstawowe podejścia do zarządzania ryzykiem portfela kredytowego – zarówno te o charakterze czysto naukowym, jak i te, które przybrały formę powszechnie znanych produktów komercyjnych[1].

Podejścia oparte na wykorzystaniu klasycznej teorii Markowitza

Ten typ modelowania ryzyka portfela kredytowego znalazł odbicie w pracach Altmana [4], [5], [6], Gollingera i Morgana [31] oraz Stevansona i Fadila [24]. Różnią się one przede wszystkim metodą szacowania stóp zwrotu z poszczególnych klas kredytów i estymowania ich macierzy kowariancji, a także wykorzystywaną miarą ryzyka.

Poniżej zostaną zaprezentowane metody opracowane przez Altmana oraz Gollingera i Morgana. Praca Stevansona i Fadila ma charakter raczej intuicyjny. Ponieważ zbyt mało jest w niej konkretów, zostanie pominięta.

Podejście Altmana

Praca Altmana opiera się na klasyfikowaniu kredytów ze względu na poziom ryzyka, podobnie jak w przypadku obligacji (tj. Aaa, Aa, A, Bbb, Bb, B, Ccc...). Będziemy zakładać, że istnieje K takich klas, a K-ta klasa oznacza niewypłacalność. Do klasyfikacji można wykorzystywać analizę dyskryminacyjną, model logitowy lub probitowy. Autor sugeruje jednak wykorzystanie w tym celu opracowanego przez siebie modelu ZETA. Altman zakłada ponadto, że dla każdej klasy kredytów możemy obliczyć na podstawie danych historycznych średnią stopę zwrotu w stosunku rocznym w podokresie t (gdzie $t = 1, 2, 3..., T$), którą oznacza przez YTM_i^t. Oczekiwaną roczną stopę zwrotu skorygowaną o straty na okres t dla i-tej klasy definiujemy jako $EAR_i^t = YTM_i^t - EAL_i^t$, gdzie EAL_i^t oznacza oczekiwaną roczną stratę obliczoną dla rozpatrywanej próby. Przyjmując, że $YTM_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} YTM_i^t$ oraz $EAL_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} EAL_i^t$ średnią historyczną stopę zwrotu skorygowaną o oczekiwane straty dla okresu złożonego z podokresów aż do T włącznie, otrzymujemy $EAR_i = YTM_i - EAL_i$. Aby obliczyć oczekiwaną stratę dla i-tej klasy, tj. EAL_i^t, musimy najpierw oszacować macierz przejścia między poszczególnymi klasami $P = (p_{ij})_{i,j=1,...K}$. Prawdopodobieństwo przejścia z i-tej do j-tej klasy estymujemy za pomocą częstości przejść międzyokresowych między tymi klasami w rozpatrywanej

* Prace nad powyższą publikacją zostały częściowo sfinansowane z grantu KBN PBZ-016/P03/99. Pierwszą jej część opublikowaliśmy w nr. 5/2003 „Banku i Kredytu".

[1] Prace, na których bazują te modele, są niestety z reguły wysoce nieprecyzyjne i mało sformalizowane.

próbie. Dodatkowo zakładamy, że umiemy oszacować dla i-tej klasy przeciętny czas trwania umowy – d_i, stopę odzyskania należności w przypadku migracji do klasy nieściągalności – rec_i oraz zmianę różnicy między stopą zysku a stopą bez ryzyka (tzw. *spread*) w wyniku migracji do dowolnej z klas między okresami $t-1$ a t, którą oznaczamy przez Δs_{ij}. Mając powyższe dane, oczekiwaną roczną stratę obliczamy jako $EAL_i^t = \sum_{j=1}^{K-1} d_j \left(\Delta s_{ij}^t\right)^- p_{ij} + \left(1 - rec_i\right)\left(\Delta s_{iK}^t\right)^- p_{iK}$. Kolejnym krokiem jest przyjęcie miary ryzyka oraz oszacowanie macierzy kowariancji. Altman proponuje tutaj dwa podejścia.

Pierwsze z nich polega na uwzględnieniu jako miary ryzyka portfela kredytowego odchylenia standardowego określonych w powyższy sposób stóp zwrotu portfela kredytowego. W tym celu za pomocą danych historycznych należy oszacować macierz kowariancji $C = \left(\sigma_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,K}$. Jako estymatory kowariancji przyjmujemy wówczas kowariancje próbkowe $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(EAR_i^t - EAR_i\right)\left(EAR_j^t - EAR_j\right)$.

Drugie podejście jest nieco bardziej zawiłe i zakłada, że ryzyko portfela powinno być mierzone jako wariancja tzw. nieoczekiwanych strat. Zakładając, że $\sigma_{EAL_i}^2$ – wariancja oczekiwanych strat – jest niezmiennicza ze względu na okres oraz że oczekiwane straty EAL_i^t każdej klasy i i podokresu t pochodzą z rozkładu normalnego o parametrach $N\left(EAL_i^t, \sigma_{EAL_i^t}\right)$, nieoczekiwaną stratę w podokresie t dla i-tej klasy u_i^t definiujemy jako wartość krytyczną $P\left(EAL_i^t \le u_i^t\right) = 1 - \sigma$ [2]. Jak łatwo zauważyć $u_i^t = EAL_i^t + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_{EAL_i}$ gdzie $\Phi^{-1}(\cdot)$, oznacza odwrotność dystrybuanty wystandaryzowanego rozkładu normalnego. Altman proponuje w celu uzyskania oszacowania u_i^t podstawić za σ_{EAL_i} wyestymowane odchylenia standardowe próby $\sigma_{EAL_i} = \left(\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}\left(EAL_i^t - EAL_i\right)^2\right)^{1/2}$. Przyjmując $u_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} u_i^t$, kowariancje stóp zwrotu można estymować przy użyciu kowariancji próbkowych $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(u_i^t - u_i\right)\left(u_j^t - u_j\right)$. Mając oszacowane w powyższy sposób parametry modelu Markowitza, można przystąpić do wyznaczania optymalnego portfela kredytowego.

Podejście Gollingera i Morgana

Gollinger i Morgan [31] rozpatrują natomiast podział kredytów ze względu na branżę, z której pochodzi kredytobiorca. Zakładają, że oczekiwane stopy zwrotu dla branż można obliczyć przy użyciu **Loan Pricing Matrix** – produktu dostarczanego przez firmę **Loan Pricing Corporation**. Za miarę ryzyka postulują przyjęcie wariancji stóp zwrotu. Ponieważ brakuje powszechnie dostępnych szeregów czasowych zrealizowanych w przeszłości stóp zwrotu dla poszczególnych typów kredytów, nie można przy ich użyciu oszacować macierzy kowariancji. Autorzy proponują więc, aby przybliżyć ją macierzą kowariancji wskaźników oceniających jakość kredytobiorcy (np. wskaźnik ZETA Altmana lub zmienna y^* w modelu logitowym oraz probitowym). Zakładając bowiem, że dysponujemy danymi historycznymi o takich wskaźnikach – tj. próbą w_i^t, gdzie i oznacza typ kredytu, a t rozpatrywany okres - kowariancje próbkowe wynoszą odpowiednio $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(w_i^t - w_i\right)\left(w_j^t - w_j\right)$. Ten sam pomysł zawarty jest także w pracy Stevensona i Fadila [24].

Scenariuszowe podejście Benneta

Na początku pragnę podkreślić, że model przedstawiony w pracy Benneta [11] ma charakter bardzo nieformalny. Jest to raczej jego szkic niż precyzyjnie sformułowany model. Postaram się jednak – na ile to możliwe – przedstawić go w nieco bardziej formalny sposób.

Załóżmy, że portfel kredytowy banku składa się z kredytów[3] i dla każdego z nich możemy określić pewien **rating** $Rat_i \in \{1,\dots,n\}$. Wyższa wartość Rat_i odpowiada gorszej jakości kredytowej, czyli większemu ryzyku. Dla każdej z rozpatrywanych umów kredytowych jesteśmy także w stanie określić wyrażoną nominalnie potencjalną stratę banku (tzw. pozycję ryzyka kredytowego banku lub *credit exposure*), którą oznaczymy przez CE_i. Autor zakłada, że w przyszłości mogą zajść pewne zdarzenia ze zbioru możliwych zdarzeń $\overline{S} = \{s_1,\dots,s_k\}$ (np. s_1 – wzrost inflacji o 5%, a s_2 – spadek wzrostu PKB o 3%). Podzbiór zbioru zdarzeń $S \in \overline{S}$, złożony ze wzajemnie niewykluczających się zdarzeń, opisuje pewien scenariusz rozwoju przyszłości. Dyskretny rozkład ratingów kredytowych ze względu na potencjalną stratę możemy zdefiniować jako $p_r = \left(\sum_{i\in\{j:Rat_j=r\}} CE_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I} CE_i\right)$. Zakładamy ponadto, że zrealizowanie się w przyszłości scenariusza S może zmienić rating i-tego kredytu na $Rat_i(S) \in \{1,\dots,n\}$. W podobny sposób, w jaki robiliśmy to poprzednio, można wyznaczyć rozkład ratingów kredytowych całego portfela ze względu na potencjalną stratę, pod warunkiem pojawienia się scenariusza S, jako $p_r(S) = \left(\sum_{i\in\{j:Rat_j(S)=r\}} CE_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I} CE_i\right)$. W ten sposób, dla dowolnego możliwego scenariusza S możemy policzyć zmianę rozkładu w wyniku jego wydarzenia się, czyli $\Delta p_r(S) = p_r(S) - p_r$. Do pomiaru ryzyka portfela kredytowego, pod warunkiem pojawienia się scenariusza S, autor używa następującego indeksu: $Index(S) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \Delta p_r(S)$, gdzie α_r są arbitralnie przyjętymi wagami takimi, że $\alpha_r > \alpha_{r-1}$. Na podstawie tak skonstruowanego indeksu można porównywać wpływ poszczególnych scenariuszy na ryzyko kredytowe. Niech więc S' oznacza najgorszy z możliwych scenariuszy, czyli taki, który maksymalizuje powyższy indeks. Dla każdej umowy kredytowej możemy zatem obliczyć wskaźnik wpływu poja-

[2] Powyższa koncepcja bezpośrednio nawiązuje do sposobu mierzenia ryzyka za pomocą Value at Risk.

[3] Nie kategorii kredytów, lecz samych kredytów.

wienia się najgorszego scenariusza dla jej **ratingu**, czyli $Z_i = Rat_i(S^{'}) - Rat_i$. Zakłada się ponadto, że z każdą umową można związać jej stopę zwrotu R_i (np. oprocentowanie roczne kredytu). Mając powyższe dane, można stworzyć diagram $\{(Z_i, R_i)\}_{i=1,\ldots,r}$. Bennet sugeruje, że preferencje banku względem tego, ile jest on skłonny zapłacić za zwiększenie stopy zwrotu (R) w terminach ryzyka (Z), można zdefiniować przez parę dodatnio nachylonych prostych $l_1 : R = a_1 + bZ$ oraz $l_1 : R = a_1 + bZ$. Wyznaczają one obszar pomiędzy nimi taki, że znajdujące się w środku niego kombinacje ryzyka, a także stopy zwrotu są akceptowalne przez bank. Wspólne nachylenie linii wyznacza preferencje banku w terminach ryzyko – zysk, a odstęp między nimi pewność banku co do prawidłowego pomiaru ryzyka i stopy zwrotu. Kombinacje znajdujące się poniżej dolnej linii charakteryzują się tym, że dodają istotną porcję ryzyka i dlatego powinny przynosić większą stopę zwrotu. Z kolei kombinacje znajdujące się powyżej wyznaczonego przez linie obszaru są bardzo atrakcyjne z punktu widzenia banku, gdyż nawet po znacznym obniżeniu ich rentowności byłyby nadal akceptowane przez bank. Podział taki pozwala wskazać, które z umów kredytowych są mało atrakcyjne i powinny być usunięte z portfela albo renegocjowane w kierunku podwyższenia stopy ich rentowności, a te, które są dla banku lukratywne.

Ekonometryczny model Chirinko i Guilla

Model Chirinko i Guilla [16] jest ekonometryczną próbą uchwycenia związków między zmiennymi makroekonomicznymi a stratami z tytułu kredytów udzielanych w różnych sektorach gospodarki. W zamierzeniu autorów model ten powinien być pomocny w określeniu ryzyka portfela kredytowego dla instytucji gwarantującej depozyty, by na jego podstawie ustanawiać limity zaangażowania kredytowego oraz ustalać opłatę ubezpieczeniową, proporcjonalną do rzeczywistego poziomu ryzyka danego banku. Autorzy rozpatrują podział kredytów ze względu na branżę, z której pochodzi kredytobiorca, i przyjmują, że istnieje I takich branż. Zakładają ponadto, że egzogeniczne i niezależne zmienne losowe[4] $\tilde{Z}^1,\ldots,\tilde{Z}^J$ opisują stan gospodarki, gdzie

$$\tilde{Z}^i = \begin{cases} z_1^i & z\ prawd.\ \ p_1^i \\ \vdots & \\ z_M^i & z\ prawd.\ \ p_N^i \end{cases}$$

Zrealizowanie się wszystkich tych zmiennych opisuje stan, w jakim znalazła się gospodarka. Może się zatem znaleźć w S stanach, gdzie $S = M^J$. W stanie $(z_{k1}^1,\ldots,z_{kM}^J)$ gospodarka może się znaleźć z prawdopodobieństwem $\pi = \prod_{j=1}^J p_{kj}^j$. Dla każdego ze stanów gospodarki $s = 1,\ldots, S$ możemy zatem określić prawdopodobieństwo jego pojawienia się jako π_S. Oznaczając z^i przez wektor $(z_1^i,\ldots,z_M^i)$ oraz przez $y_{i,s}$ wektor zmiennych endogenicznych wpływających na sytuację tej branży w stanie s, takich jak np. procentowy wzrost sprzedaży, wzrost kosztów, czy zwiększenie się liczby podmiotów działających w danej branży, autorzy zakładają, że istnieje deterministyczny związek pomiędzy wektorami $z^1,\ldots,z^J$ a wektorem $y_{i,s}$, opisywany przez funkcję $\Psi_i[\cdot]$, tj. $y_{i,s} = \Psi_{i,s}[z^1,\ldots,z^J]$. Postulują, by postać powyższej funkcji estymować za pomocą modelu przepływów międzygałęziowych Leontiefa[5]. Zakłada się ponadto, że strata z tytułu udzielonych kredytów w i-tej branży, gdy gospodarka znalazła się w stanie s, opisywana jest przez następujące równanie regresji $l_{i,s} = \Lambda_i[y_{i,s}] + \varepsilon_{i,s}$, gdzie $\varepsilon_{i,s}$ jest szokiem specyficznym dla branży. Autorzy przyjmują, że funkcja $\Lambda_i[\cdot]$ jest funkcją liniową i może być estymowana przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Mając więc oszacowane obie funkcje oraz znając prognozy zmiennych makroekonomicznych $\tilde{Z}^1,\ldots,\tilde{Z}^J$, możemy określić przyszły rozkład strat i-tej branży, czyli zmienną

$$\tilde{l}_i = \begin{cases} l_{i,1} & z\ prawd.\ \ \pi_1 \\ \vdots & \\ l_{i,S} & z\ prawd.\ \ \pi_S \end{cases}$$

W łatwy sposób możemy teraz obliczyć oczekiwaną stratę dla całego portfela $x = (x_1,\ldots,x_I)$. Do pomiaru ryzyka autorzy sugerują użycie odchylenia standardowego straty portfela, którą oznaczamy przez $l(x)$, lub prawdopodobieństwa tego, że strata przekroczy ustaloną wartość l^*, czyli $\eta = P(\tilde{l}(x) \geq l^*)$. Jak łatwo zauważyć, zmienne $\tilde{l}_1,\ldots,\tilde{l}_I$ nie muszą być niezależne, czyli model uwzględnia pewne zależności występujące między stratami z tytułu udzielonych kredytów w różnych sektorach gospodarki.

Podejście Wilsona

Model Wilsona [58], [59], [60] jest wykorzystywany przez firmę McKinsey Co. w **CreditPortfolioView** – produkcie do oceny ryzyka portfeli kredytowych. Jest on modelem ekonometrycznym wykorzystującym metody **Monte Carlo**. Model zakłada, że dla każdego typu kredytów istnieje pewien rodzaj ryzyka określany jako „ryzyko systematyczne", które nie może być dywersyfikowane i ściśle wiąże się z czynnikami makroekonomicz-

[4] Autorzy przyjmują jako zmienne: inflację, poziom stóp procentowych, deficyt budżetowy oraz ważony obrotami w handlu zagranicznym kurs koszyka walutowego. Można by się natomiast spierać, czy takie zmienne wolno traktować jako niezależne.

[5] Model przepływów międzygałęziowych ma postać układu równań liniowych Ax = d, gdzie wektor x przedstawia ilości poszczególnych dóbr produkowanych w gospodarce, elementy macierzy oznaczają liczbę jednostek i-tego nakładu potrzebną do wyprodukowania jednostki j-tego produktu, a wektor d oznacza egzogeniczny dodatkowy popyt na produkty (Chiang [15], s. 126-134).

nymi. Przyjmując, że istnieje I typów kredytów, zakłada się, że dla każdego z nich prawdopodobieństwo niespłacenia przez kredytobiorcę kredytu opisywane jest przez model logitowy:

$$y^*_{itj} = \beta_{i0} + \beta_{i1} z_{1t} + \ldots + \beta_{in} z_{nt} + v_{itj}$$

oraz $y_{it} = 1$ (niewywiązanie się ze zobowiązań), jeżeli $y^*_{itj} \leq 0$ i $y_{itj} = 0$ (wywiązanie się z umowy), jeżeli $y^*_{itj} > 0$. Wskaźnik i oznacza typ kredytu, $t = 1,\ldots,T$ opisuje podokres, z którego pochodzi obserwacja, a $j = 1,\ldots,J$ to numer obserwacji w rozpatrywanym podokresie[6]. Przyjmuje się ponadto, że zmienne objaśniające $z_{1t},\ldots,z_{nt}$ są zmiennymi makroekonomicznymi, takimi jak bezrobocie, deficyt budżetowy, inflacja, wzrost gospodarczy. Możemy zatem interpretować zmienną y^*_{itj} jako wskaźnik sytuacji gospodarczej. Oznaczając $\hat{y}_{itj} = \beta_{i0} + \beta_{i1} z_{1t} + \ldots + \beta_{in} z_{nt}$, prawdopodobieństwo niewywiązania się i-tego kredytobiorcy z umowy kredytowej w sytuacji, gdy gospodarka opisywana jest przez zmienne $z_{1t},\ldots,z_{nt}$, określane jest jako $P(y_{itj} = 1) = \frac{1}{1+\exp(\hat{y}_{itj})}$. Długookresowe prawdopodobieństwo niespłacenia kredytu dla i-tego typu określone jest jako średnia $LDR_i = \frac{1}{JT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} P(y_{itj} = 1)$. Średnie prawdopodobieństwo niewywiązania się ze zobowiązań dla i-tego typu w podokresie t definiuje się jako $DR_{it} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} P(y_{itj} = 1)$.

Autor zakłada dalej, że każdy typ kredytu opisywany jest przez jeden wspólny dla wszystkich typów system **ratingowy**. Dla każdego z typów może następować „migracja”, czyli zmiana w czasie **ratingu** przyporządkowanego danemu typowi. Proces ten uzależniony jest jednak od sytuacji gospodarki. W czasie recesji obniżenie ratingu staje się więc bardziej prawdopodobne. Autor modeluje proces migracji za pomocą niejednorodnego łańcucha Markowa. Łańcuch ten zawiera ponadto jeden stan absorbujący[7], a mianowicie stan niewywiązania się z umowy kredytowej. Przyjmuje się, że wskaźnik DR_{it}/LDR_i mierzy, czy bardziej prawdopodobna jest zmiana ratingu „w górę”, czy „w dół”. Zakłada się, że macierz przejścia łańcucha Markowa, opisującego ewolucję ratingów i-tego typu kredytów w podokresie t, zależy od powyższego wskaźnika. Może ona przyjąć trzy wartości w zależności od tego, czy bardziej prawdopodobne jest podwyższenie, bądź obniżenie ratingu, czyli jeżeli:

$$M_i(DR_{it}/LDR_i) = \begin{cases} M_i^1 & \text{jeżeli} \quad DR_{it} \geq LDR_i + c_i \\ M_i^2 & \text{jeżeli} \quad |DR_{it} - LDR_i| < c_i \\ M_i^3 & \text{jeżeli} \quad DR_{it} \leq LDR_i - c_i \end{cases}$$

gdzie c_i jest pewną arbitralnie przyjętą stałą, określającą poziom tolerancji.

Przyjmuje się, że zachowanie makroekonomicznych zmiennych opisywane jest za pomocą procesu autoregresji $AR(q)$, czyli równaniem:

$$z_{jt} = a_{j0} + \sum_{n=1}^{q} a_{jn} z_{jt-n} + \varepsilon_{jt}$$

gdzie $a_{j0},\ldots,a_{jn}$ są współczynnikami procesu, ε_{jt} a dla $t = 1$ niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.

Rozkład strat portfela kredytowego estymowany jest przy użyciu metody **Monte Carlo**. Oznaczmy przez $(\upsilon,\varepsilon)'$ wektor $(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_I,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$. Będziemy zakładać, że $(\upsilon,\varepsilon)' \sim N(0,\Sigma)$, gdzie:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_\upsilon & \Sigma_{\varepsilon\upsilon} \\ \Sigma_{\varepsilon\upsilon} & \Sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

Macierz tę możemy wyestymować na podstawie danych historycznych.

Procedura estymacji strat zawiera następujące kroki:

1. Generowanie realizacji wektorów $X_1,\ldots,X_T$, gdzie $X_t \sim N(0,Id)$, a macierz identyczności Id ma wymiar równy $N+1$.

2. Wykorzystując rozkład Choleskiego[8] macierzy $\Sigma = A'A$, w łatwy sposób możemy wygenerować $Y_1,\ldots,Y_T$ zmienne o rozkładzie $Y_t \sim N(0,Id)$, przyjmując $Y_t = AX_t$. Mając je, a także oszacowania współczynników równań (1) i (2), należy obliczyć wartości zmiennych y^*_{it} oraz z_{it} dla $i = 1,\ldots,T$ oraz $t = 1,\ldots,T$. Za ich pomocą można wyznaczyć ciągi prawdopodobieństw $P(y_{it} = 1)$ niewywiązania się z umowy kredytowej.

3. Powtarzając powyższe kroki 10.000 tysięcy razy, możemy otrzymać rozkład prawdopodobieństw niespłacenia kredytów dla każdego typu kredytu oraz dowolnego podokresu. Stąd można otrzymać rozkład prawdopodobieństw straty całego portfela.

4. Mając wyznaczony ciąg prawdopodobieństw niespłacenia kredytu, możemy określić wskaźniki DR_{iT}/LDR_i i na ich podstawie dla każdego typu kredytu określić ciąg macierzy przejścia $M_i(DR_{i1}/LDR_i),\ldots, M_i(DR_{iT}/LDR_i)$. W ten sposób dla każdego **ratingu** kredytowego (np. Aaa) łatwo możemy znaleźć prawdopodobieństwo przejścia do dowolnego **ratingu** (np. Bb) oraz prawdopodobieństwo niewywiązania się z umowy (czyli przejścia do stanu odpowiadającego temu wydarzeniu) w najbliższych t podokresach.

Jako miarę ryzyka dla każdego typu kredytu Wilson proponuje najmniejszy α – kwantyl z wylosowanej metodami **Monte Carlo** próby opisującej rozkład prawdopodobieństw niespłacenia kredytu dla tego typu.

Jak można zauważyć, model ten jest dosyć skomplikowany, gdyż wymaga umiejętności estymacji, na podstawie danych historycznych, parametrów modelu logitowego, procesu autoregresji i macierzy kowariancji oraz zastosowania metod **Monte Carlo**.

[6] *Implicite* zakłada się, że powyższa funkcja nie zmienia się w czasie.

[7] Tj. taki stan, że łańcuch w nim pozostaje, pod warunkiem, że uprzednio się w nim znalazł.

[8] Rozkładem Choleskiego nieujemnie określonej oraz symetrycznej macierzy Σ nazywamy rozkład macierzy $\Sigma = A'A$, gdzie A jest macierzą trójkątną górną (tj. macierzą o zerowych elementach poniżej przekątnej).

Model Credit Metrics

Model **Credit Metrics** jest produktem komercyjnym firmy J.P. Morgan. Został opracowany przez G.M. Guptona, Ch.C. Fingera i M. Bhatia [12] w 1997 r. Jest to model jednookresowy, tzn. zmiany sytuacji kredytobiorców mogą następować tylko jeden raz w ustalonym okresie, za który najczęściej przyjmuje się jeden rok. Utrzymuje się, że kredytobiorcy są podmiotami gospodarczymi, a każdą umowę kredytową można zakwalifikować do jednej z klas ratingowych, należących do $\{1,\ldots,K\}$. Im wyższy numer ratingowy, tym większe prawdopodobieństwo niewywiązania się z umowy, a najwyższa K-ta klasa oznacza niewypłacalność kredytobiorcy. Znana jest ponadto macierz przejścia $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,K}$ między powyższymi klasami oraz terminowa struktura stóp procentowych dla każdej z tych klas. Model zakłada, że każda umowa kredytowa może w ciągu roku zmienić swoją klasę ratingową zgodnie z prawdopodobieństwami zawartymi w macierzy przejścia. Migracja ta zmienia terminową strukturę stóp procentowych dla danego kredytu, gdyż założyliśmy, że struktura ta zależy od klasy ryzyka wyznaczonej przez rating. Każda pożyczka dla i-tego kredytobiorcy, gdzie $i = 1,\ldots,N$ traktowana jest jako ciąg płatności $CF^i_{t1},\ldots,CF^i_{tn}$ zapadalnych w chwilach $t_1,\ldots,t_n$, gdzie t_j oznacza lata od chwili obecnej[9]. Zakładając, że w ciągu roku nastąpi zmiana klasy ratingowej z $m \in \{1,\ldots,K-1\}$ na klasę $n \in \{1,\ldots,K-1\}$, tj. nie zdarzy się w ciągu roku niewywiązanie kredytobiorcy z umowy, wartość obecna takiego strumienia wyniesie:

$$PV^i_{mn} = \sum_{t_j<1} CF_{t_j}\left(1+y^{t_i}_m\right)^{-1} + \sum_{t_j\geq 1} CF_{t_j}\left(1+y^{t_i}_n\right)^{-1}$$

gdzie $y^{t_i}_m$ oraz $y^{t_i}_n$ oznaczają odpowiednio stopy zwrotu dla m-tej oraz n-tej klasy ratingowej od chwili 0 do t_j, ustalone na podstawie terminowej struktury stóp procentowych. W przypadku migracji z klasy m do klasy K, tj. w sytuacji, gdy kredytobiorca w ciągu roku stanie się niewypłacalny, przyjmujemy, że wartość obecna wyraża się jako

$$PV^i_{mK} = \sum_{t_j<1} CF_{t_j}\left(1+y^{t_i}_m\right)^{-1} + rec_i \sum_{t_j\geq 1} CF_{t_j}$$

gdzie rec_i oznacza stopę odzyskania należności. Autorzy – w zależności od tego, czy są zainteresowani obliczeniem jako miary ryzyka odchylenia standardowego wartości portfela za rok, czy też przybliżeniem na podstawie symulacji **Monte Carlo** rozkładu wartości portfela na koniec roku w celu obliczenia **Value at Risk** – przyjmują dwa założenia co do powyższej stopy. W przypadku obliczania odchylenia standardowego przyjmuje się, że jest ona stałą równą średniej historycznej stopie odzyskania straconych należności, zależną od tego, czy dana umowa jest pożyczką podporządkowaną oraz czy jest objęta gwarancjami lub ubezpieczeniem. Próbując wyznaczyć na podstawie metod **Monte Carlo** rozkład wartości portfela, przyjmuje się, że dla każdej umowy kredytowej stopa ta jest zmienną losową o rozkładzie Beta $B(\alpha, \beta)$, którego parametry zależą z kolei wyłącznie od tego, czy dana umowa jest pożyczką podporządkowaną oraz czy jest objęta gwarancjami lub ubezpieczeniem[10]. Stopy te są łącznie niezależne dla różnych umów kredytowych oraz są niezależne od przyszłych ratingów kredytobiorców.

Możemy więc wartość obecną i-tego kredytu, którego początkowy rating wynosi m_i, traktować jako następującą zmienną losową:

$$PV_{m_i} = \begin{cases} PV^i_{m_i 1} & z\ prawd.\ \ p_{m1} \\ \vdots & \\ PV^i_{m_i K} & z\ prawd.\ \ p_{mK} \end{cases}$$

gdzie prawdopodobieństwa p_{mj} są elementami macierzy przejścia Π.

W omawianym opracowaniu zaproponowano sposób wyznaczania łącznych rozkładów przejść dla dwóch dowolnych kredytobiorców $i, j = 1,\ldots,N$ oraz $i \neq j$, których ratingi wynoszą obecnie odpowiednio m_1 oraz m_2. Oznaczmy przez $p^{ij}_{k_1,k_2|m_i,m_j}$ łączne prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że ***rating*** i-tego oraz j-tego kredytobiorcy wyniesie za rok odpowiednio k_1 oraz k_2. Podstawą jego oszacowania jest założenie, że zmiany w ratingu i-tego kredytobiorcy zależą wyłącznie od zmian wartości aktywów kredytobiorcy mających rozkład normalny wartościach parametrach $N(\mu_{m_i},1)$. Znając prawdopodobieństwa przejścia $p_{m_i 1},\ldots,p_{m_i K}$ będące elementami macierzy Π, możemy wyznaczyć wartości progowe $l_{m_i 1} > \ldots > l_{m_i K-1}$ takie, że jeżeli $X_i \sim N(\mu_{m_i},1)$, to $P(X > l_{m_i 1}) = p_{m_i 1}$, $P(X < l_{m_i K-1}) = p_{m_i K}$ oraz $P(l_{m_i j} < X < l_{m_i j-1}) = p_{m_i j}$. Autorzy zakładają ponadto, że wektor zmiennych $(X_1,\ldots,X_N)'$ ma łączny rozkład normalny o wektorze oczekiwanych stóp zwrotu $(\mu_{m_1},\ldots,\mu_{m_N})$ i macierzy kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & & \rho_{ij} \\ & \ddots & \\ \rho_{ji} & & 1 \end{pmatrix}_{i,j=1,\ldots,N}$$

gdzie ρ_{ij} jest korelacją między zmianami wartości aktywów i-tego oraz j-tego kredytobiorcy. Wartość ta obliczana jest na bazie historycznych korelacji między zwrotu skonstruowanymi dla firm indeksami stóp zwrotu na podstawie danych na temat udziału sprzedaży w poszczególnych branżach różnych krajów oraz charakterystycznych dla nich indeksów branżowych[11].

[9] Autorzy przewidują możliwość zastosowania Credit Metrics także w odniesieniu do linii kredytowych. Wymaga to jednak oszacowania średnich terminów wpłat i wypłat oraz ich wysokości.

[10] Rozkład beta $B(\alpha, \beta)$ określony jest przez funkcję gęstości:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} 1_{[0,1]}(x)$$

gdzie $\alpha > \beta > 0$.

[11] Procedura ta jest dosyć długa i nieco skomplikowana i dlatego nie zostanie szczegółowo omówiona.

Możemy więc zapisać:

$$p^{ij}_{k_1,k_2|m_i,m_j} = P\left(l_{m_i k_1} < \mathrm{X} < l_{m_i k_1 - 1}, l_{m_j k_2} < \mathrm{X} < l_{m_j k_2 - 1}\right)$$

Na tej podstawie jesteśmy w stanie obliczyć kowariancje między wartościami obecnymi kredytów udzielonych *i*-temu oraz *j*-temu kredytobiorcy

$$cov\left(PV^i_{m_i}, PV^j_{m_j}\right) = \sum_{k_1,k_2 \in \{1,..,K\}} PV^i_{m_i k_1} PV^j_{m_j k_2} p^{ij}_{k_1,k_1|m_i,m_j} -$$

$$\left(\sum_{k_1 \in \{1,...,K\}} PV^i_{m_i k_1} p_{m_i k_1}\right)\left(\sum_{k_2 \in \{1,...,K\}} PV^j_{m_j k_2} p_{m_j k_2}\right)$$

Znając kowariancje między wartościami obecnymi kredytów dla dowolnych dwóch kredytobiorców, możemy wyznaczyć macierz kowariancji wartości obecnych umów kredytowych i na tej podstawie wariancję całego portfela równą:

$$\sigma^2 = \Sigma_{i,j=1,...,N} \operatorname{cov}\left(\mathrm{PV}^i_{m_i}, \mathrm{PV}^j_{m_j}\right).$$

Oprócz brania pod uwagę odchylenia standardowego jako miary ryzyka, rozważane jest także wykorzystanie **Value at Risk**, którą definiujemy jako $Z_\alpha = \inf\left\{z : P\left((V - EV)^- \geq z\right) \leq \alpha\right\}$, gdzie V jest zmienną losową, opisującą obecną wartość portfela, α zaś arbitralnie przyjętym poziomem tolerancji. W tym celu autorzy zalecają przybliżenie metodą **Monte Carlo** rozkładu zmiennej V. Polega ona na wygenerowaniu próby około 20.000 tysięcy wektorów zmiennych $X^{(i)} = \left(X^{(i)}_1, ..., X^{(i)}_N\right)^1 \sim N(\mu, \Sigma)$. oraz zmiennych $rec_i \sim B\left(\alpha_{k_i}, \beta_{k_i}\right)$. Na tej podstawie możemy następnie dla każdego wygenerowanego wektora $X^{(i)}$ oraz zmiennej rec^i wyznaczyć łączne zmiany **ratingów** dla wszystkich N składników portfela, a zatem także wartości obecne poszczególnych składników portfela, pod warunkiem zrealizowania zmian ich ratingów. Sumując wartości obecne wszystkich składowych portfela, otrzymujemy wartość całego portfela, którą oznaczymy przez $V^{(i)}$. W ten sposób możemy otrzymać rozkład wartości całego portfela. Oznaczając $\overline{V} = \frac{1}{20000}\sum_{i=1}^{N} V^{(i)}$ oraz $Y_i = \left(V^{(i)} - \overline{V}\right)^-$, jako estymator V**alue at Risk** przyjmujemy $\hat{Z}_\alpha = Y_{\lceil(1-\alpha)20000\rceil+1:20000}$ [12].

Autorzy argumentują, że model może znaleźć zastosowanie w ustanawianiu reguł postępowania ograniczających ryzyko kredytowe, w ocenie efektywności pracy zarządu, określaniu limitów kredytowych oraz adekwatności kapitałowej (na podstawie **Value at Risk**) potrzebnej, by bank mógł się wywiązać ze swoich zobowiązań w przypadku, gdy wydarzy się niekorzystny, lecz mało prawdopodobny scenariusz rozwoju przyszłości.

Podejście aktuarialne - CreditRisk+

CreditRisk+ jest powstałym w 1996 r. produktem firmy Credit Suisse służącym do zarządzania ryzykiem portfela kredytowego [19]. Jego konstrukcja opiera się na zastosowaniu pewnych rozwiązań znanych w matematyce aktuarialnej. Kredytobiorcy są dzieleni na rozłączne zbiory („pasma"), z których każdy charakteryzowany jest przez pewną stałą wartość potencjalnej straty. Jednostkę rozrachunkową dobiera się w ten sposób, aby potencjalna strata była liczbą całkowitą. Dla każdego z pasm przeprowadza się następujące rozumowanie.

Przyjmuje się, że istnieje K sektorów gospodarki oraz że dane pasmo składa się z N kredytobiorców, z których każdy może mieć udział w wybranych sektorach. Zakłada się, że kredytobiorców jest bardzo dużo, a prawdopodobieństwo niewypłacalności pojedynczego kredytobiorcy jest niewielkie[13].

Udział n-tego kredytobiorcy w j-tym sektorze oznaczmy przez θ^k_n i dla każdego $n = 1,...,N$ zachodzi $\sum_{k=1}^{K} \theta^k_n = 1$. Zakłada się również, że na podstawie ratingu przypisanego każdemu kredytobiorcy można odpowiednio określić średnią częstość niewywiązania się przez niego z warunków umowy P_n oraz odchylenie standardowe tej częstości σ_n. Niech zmienne losowe $X^1,...,X^K$ oznaczają średnią liczbę przypadków niewypłacalności w ciągu roku w odpowiednich sektorach. Zakłada się, że zmienne te są niezależne, a rozkład prawdopodobieństwa każdej z nich jest rozkładem Gamma[14] $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$. Oznaczmy μ_k przez σ_k oraz odpowiednio wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X_k. Wiadomo, że $\alpha_k = \mu^2_k/\sigma^2_k$ i $\beta_k = \sigma^2_k/\mu_k$. Przyjmuje się $\mu_k = \sum_{n=1}^{N} p_n \theta^k_n$ oraz $\sigma_k = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \theta^k_n$. Zakładając, że średnia liczba przypadków niewypłacalności w k-tym sektorze wyniosła x_k, tj. $X_k = x_k$, faktyczna liczba przypadków niewypłacalności w tym sektorze ma rozkład Poissona[15] $\pi(x_x)$. Twórcy produktu, wykorzystując narzędzia stosowane w matematyce aktuarialnej, uzyskują formuły na łączny rozkład liczby przypadków niewypłacalności dla danego pasma. Ponieważ przyjęliśmy, że potencjalna wielkość straty dla wszystkich kredytobiorców z danego pasma jest taka sama, w łatwy sposób, mając rozkład liczby przypadków niewypłacalności, możemy otrzymać dla danego pasma rozkład wielkości strat. Znając mechanizm powstawania strat dla poszczególnych pasm, można określić rozkład strat całego portfela kredytowego banku. Jako miarę ryzyka portfela kredytowego przyjmuje się α–kwantyl rozkładu strat portfela.

Jak łatwo można zauważyć, trzy z omówionych powyżej modeli bazują na związaniu ryzyka kredytowego ze zmiennymi makroekonomicznymi. Należą do nich:

---

12 Przez $Y_{k:n}$ oznaczamy k-tą statystykę pozycyjną z próby n-elementowej.

13 Podejście takie jest często spotykane w modelach ubezpieczeniowych. Przyjmuje się wówczas, że firma ubezpieczeniowa ma do czynienia z dużą liczbą szkód, z których każda może się pojawić z bardzo małym prawdopodobieństwem.

14 Rozkład Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$. jest określony przez funkcję gęstości $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}} \mathrm{x}^{\alpha-1}$ gdzie $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ jest funkcją Gamma. Jego wartość oczekiwana i wariancja wyraża się odpowiednio jako $\mu = \alpha\beta$ i $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

15 Rozkład Poissona $\pi(\mathrm{x})$ jest rozkładem dyskretnym określonym w następujący sposób: $P(n) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}$ dla n = 0, 1... . Jego wartość oczekiwana i wariancja są sobie równe i wynoszą x.

model Benneta, model Chirinko i Guilla oraz model Wilsona. Warto również zauważyć, że podejście Altmana, Wilsona oraz **Credit Metrics** zakładają istnienie ratingów dzielących kredyty na poszczególne klasy ryzyka oraz możliwość oszacowania macierzy prawdopodobieństw przejścia między nimi. Należy dodać, że spośród powyższych modeli w sposób komercyjny wykorzystuje się jedynie trzy: model Wilsona wykorzystywany w opracowanym przez McKinsey Company **CreditPortfolioView**, produkt **Credit Metrics** oferowany przez J.P. Morgan oraz **CreditRisk+** stworzony przez Credit Suisse. Wynika to zapewne z faktu, że modele te zostały stworzone w odpowiedzi na faktyczne potrzeby powyższych firm. Jednak nawet te modele znajdują się jeszcze w fazie wstępnej i będą w przyszłości systematycznie wzbogacane (Komitet Bazylejski [10], s. 16). Ponadto większość z zaprezentowanych modeli nie służy do optymalizacji portfela kredytowego banku, lecz do wyznaczania rozkładu jego przyszłych wartości lub Value at Risk.

Istniejące rozwiązania, jeśli chodzi o pomiar ryzyka kredytowego oraz problemy z tym związane, są w ogólny sposób przedstawione w jednym z dokumentów opracowanych przez Komitet Bazylejski [10]. Zawiera on analizę metod stosowanych w 20 bankach pochodzących z 10 krajów. Inny interesujący przegląd praktycznie wykorzystywanych modeli zawarty jest w książce Saundersa [53].

Na koniec warto podkreślić, że nie są znane porównania wartości prognostycznych powyższych modeli ani nie została jeszcze opracowana powszechnie akceptowana metoda weryfikacji dawanych przez nie prognoz (Komitet Bazylejski [10], s. 16). Wynika to m.in. z małej dostępności długookresowych danych na temat zrealizowanych umów kredytowych oraz przypadków niewypłacalności dłużników. Ponadto banki posługują się różnymi definicjami pewnych wielkości (np. strat) oraz różnymi wewnętrznymi ratingami kredytobiorców. Również dane potrzebne do estymacji modeli są zbierane niekoniecznie w ten sam sposób. W końcu, banki używają z reguły tylko jednego modelu, którego parametry estymują na podstawie jedynie sobie znanych danych. Nie jest również jasne, czy proponowane podejścia dają lepsze wyniki od prostego podejścia bayesowskiego, w którym zmiana prawdopodobieństw przejścia opiera się na ekspertyzie departamentu ryzyka kredytowego m.in. na podstawie obserwowanej fazy cyklu koniunkturalnego. W tej sytuacji możliwości porównywania poszczególnych modeli są niezwykle ograniczone. Powoli pojawiają się jednak pierwsze próby analizy porównawczej modeli na podstawie tych samych zbiorów danych historycznych (Crouhy [18], Saunders [51], s. 105-106). Są one jeszcze bardzo niedoskonałe i słabo rozwinięte. Należy przypuszczać, że kolejnym krokiem w konstrukcji modeli służących do zarządzania ryzykiem będzie próba integracji ryzyka kredytowego oraz rynkowego.

Bibliografia

1. E.I. Altman, A. Saunders (1998): *Credit risk measurement: Development over the last 20 years.* „Journal of Banking and Finance” 21, s. 1721-1742.
2. E.I. Altman, J.B. Caouette, P. Narayanan (1998): *Managing Credit Risk.* John Wiley.
3. E.I. Altman, J.B. Caouette, P. Narayanan (1998): *Credit-risk measurement and management: The ironic challenge in the next decade.* „Financial Analysts Journal”, January-February, s. 7-11.
4. E.I. Altman (1997): *Corporate Bond and Commercial Loan portfolio Analysis.* New York University Salomon Brothers Center, S-97-12.
5. E.I. Altman (1997): *Rating Migration of Corporate Bonds: Comparative Results and Investor/Lender Implications.* New York University Salomon Brothers Center, S-97-3.
6. E.I. Altman (1997): *Default Rates in The Syndicated Loan Market: A Mortality Analysis*, S-97-39.
7. G.F. Angel, J.M. Diez-Canedo, E.P. Gorbea (1998): *A discrete Markov chain model for valuing loan portfolios. The case of Mexican loan sales.* „Journal of Banking and Finance” 22, s. 1457-1480.
8. T.R. Bielecki, M. Rutkowski (2002): *Credit Risk: Modelling, Valuation and Hedging.* Springer Verlag.
9. Basle Committee on Banking Supervision (2001): *The standarised approach to credit risk*, consultative document.
10. Basle Committee on Banking Supervision (1999): *Credit risk modelling: current practices and applications.*
11. P. Bennet (1984): *Applying portfolio theory to global bank lending.* „Journal of Banking and Finance” 8, s. 153 -169.
12. M. Bhatia, Ch.C. Finger, G.M. Gupton (1997): *Credit Metrics – Technical Document.* Morgan Guaranty Trust Co., New York.
13. G. Borys (1996): *Zarządzanie ryzykiem kredytowym w banku.* PWN.

14. S.A. Buser, E.J. Kane (1979): *Portfolio diversification at commercial banks.* „Journal of Finance" 34, s. 19-34.
15. A.C. Chiang (1994): *Podstawy ekonomii matematycznej.* PWN.
16. R.S. Chirinko, D.G. Guill (1991): *A framework for assessing credit risk in depository institution: Toward regulatory reform.* „Journal of Banking and Finance" 15, s. 785-804.
17. T.E. Copeland, J.F. Weston (1992): *Financial Theory and Corporate Policy.* Addison-Wesley Publishing Company.
18. M. Crouhy, D. Galai, R. Mark (2000): *Comperative analysis of current credit risk models.* „Journal of Banking & Finance" 24, s. 59-117.
19. Credit Suisse (1996): *CreditRisk+*, http://www.csfp.co.uk, 11.11.1999.
20. K. Cuthbertson (1996): *Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange.* John Wiley.
21. The Economist (1998): *Model behaviour.* February 28.
22. Euromoney (1996): *The launch of a new market: Credit Derivatives.* March, s. 28-34.
23. M.W. Fadil (1997): *Problems with weighted-average risk ratings: a portfolio management view.* „Commercial Lending Review" 12, s. 23-27.
24. M.W. Fadil, B.G. Stevenson (1995): *Modern portfolio theory: can it work for commercial loans?* „Commercial Lending Review" 10, s. 4-12.
25. Federal Deposit Insurance Corporation (1983): *Deposit Insurance in a Changing Enviroment*, Washington.
26. E.R. Fiedler, M.R. Pech (1971): *Measures of Credit Risk and Experience.* Columbia University Press.
27. J.K. Ford (1997/98): *How to benchmark portfolio risk.* „Commercial Lending Rewiev", Winter, s. 60 - 62.
28 J.K. Ford (1997): *How to assess the concentration profile of your loan portfolio.* „Commercial Lending Rewiev", Spring, s. 57-59.
29. J.K. Ford (1995): *Credit analysis using a concentration ratio to measure credit risk.* „Commercial Lending Rewiev", Summer, s. 92-94.
30. X. Freixas, J.C. Rochet (1998): *Microeconomics of Banking.* MIT Press.
31. T.L. Gollinger, J.B. Morgan (1993): *Calculation of an Efficient Frontier for a Commercial Loan Portfolio.* „The Journal of Portfolio Management", Winter.
32. R. Jagiełło, J. Nowakowski (1997): *Zysk i ryzyko inwestycji kredytowej.* „Bank i Kredyt„ nr 7-8, s. 104-107.
33. R. Jagiełło, J. Nowakowski (1998): *Optymalny portfel kredytowy jako czynnik gwarantujący bezpieczeństwo banku komercyjnego.* „Bank i Kredyt nr 5, s. 65-72.
34. K. Jajuga (1998): *Ryzyko kredytowe w finansach - pomiar i zarządzanie za pomocą instrumentów pochodnych.* W: *Modelowanie preferencji instrumentów ryzyko '98.* Praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, s. 155-162.
35. R. Jarrow, S. Turnbull (1996): *Credit Risk, The Handbook of Risk Management and Analysis.* Edited by Carol Alexander, John Wiley.
36. E.J. Kane, S.A. Buser (1979): *Portfolio diversification at commercial banks.* „Journal of Finance 34, s. 19-34.
37. J.G. Kemeny, J.L. Snell (1960): *Finite Markov Chains.* D Van Nostrand Company, Princeton.
38. KMV Corporation (1995): *Introducing Credit Monitor.* San Francisco, KMV Corporation.
39. W. Kuryłek (2000): *Credit scoring – podejście statystyczne.* „Bank i Kredyt" nr 6, s. 72-77.
40. W. Kuryłek (2000): *Modele migracji kredytów. „*Bank i Kredyt" nr 10, s. 18-23.
41. E.C. Lawrence, L.D. Smith (1995): *Forecasting losses on a liquidating long-term loan portfolio.* "Journal of Banking and Finance" 19, s. 959-985.
42. H.M. Markowitz (1952): *Portfolio selection.* „Journal of Finance", 7, s. 77-91.
43. H.M. Markowitz (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* New York John Wiley & Sons.
44. H.M. Markowitz, A.F. Perold (1981): *Portfolio analysis with scenarios and factors.* „Journal of Finance" 36, s. 871-877.
45. H.M. Markowitz, A.F. Perold (1981): *Sparsity and piecewise linearity in large portfolio optimization problems, Sparse Matrices and Their Uses.* Edited by I.S. Du., Academic Press.
46. H.M. Markowitz (1990): *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Blackwell.
47. M. Matczak, J. Nowakowski (1998): *Optymalizacja portfela kredytowego dużego banku w relacji: struktura - zysk – ryzyko.* Studia i Prace Kolegium Zarządzania i Finansów Szkoły Głównej Handlowej, zeszyt 9, s. 22 - 44.
48. R.C. Merton (1974): *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates.* „Journal o Finance" 29, s. 449-470.
49. W. Ogryczak, A. Ruszczyński (1999): *From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures.* „European Journal of Operational Research" 116, s. 33-50.
50. Prawo bankowe. Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. po nowelizacji z dnia 23 sierpnia 2001 r. Dz.U. z 2002 r. nr 72, poz. 665.

51. M. Purchia, L. Stern (1992): *Applying theory to loan portfolio management*. Financial Managers Statement, January/February.
52. P. Rose (1997): *Commercial bank management*. IRWIN.
53. A. Saunders (1999): *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*. J. Wiley.
54. J.F. Sinkey (1975): *A multivariate statistical analysis of the characteristics of problem banks*. „Journal of Finance" 30, s. 21-36.
55. M. Dewatripont, J. Tirole (1994): *The Prudential Regulation of Banks*. MIT Press.
56. L. Wakeman (1998): *Credit enhancement, Risk Management and Analysis*. Vol. 1: *Measuring and Modelling Financial Risk*. Edited by Carol Alexander, John Wiley.
57. A. Weron, R. Weron (1998): *Inżynieria finansowa*. WNT.
58. T.C. Wilson (1998): *Portfolio credit risk*. „Economic Policy Review", October , s. 71 - 82.
59. T.C. Wilson (1997): *Portfolio credit risk (I)*. „Risk Magazine", September, s. 111-117.
60. T.C. Wilson (1997): *Portfolio credit risk (II)*. „Risk Magazine", October, s. 56-61.
61. A. Woźniak (1999): *Jak świat radzi sobie z ryzykiem kredytowym*. „Rynek Terminowy" nr 3/5/99, s. 71-76