

Wycena opcji egzotycznych przy stopach zwrotu o rozkładzie hiperbolicznym – podejście symulacyjne

Marcin Kolasa

Wstęp

Wobec postępującego procesu globalizacji i zazębiania się różnych segmentów rynku bieżąca działalność gospodarcza zależy od wielu czynników charakteryzujących się dużą zmiennością i małym stopniem przewidywalności. Na przychody, wyniki i wypłacalność przedsiębiorstw w coraz większym stopniu ma wpływ poziom stóp procentowych, kursów walutowych czy cen surowców. W obliczu powyższych faktów dobre zarządzanie finansami przedsiębiorstwa jest także sztuką zabezpieczania się przed różnego rodzaju ryzykiem.

Rozwój instrumentów pochodnych znacznie zwiększył skuteczność ochrony przed niespodziewanymi i niekorzystnymi zdarzeniami. Ze względu na swoją uniwersalność szczególną popularność zdobyły opcje. Pojawiła się potrzeba stworzenia modeli wyceny coraz to bardziej skomplikowanych kontraktów opcyjnych. Krok milowy na tej drodze stanowiła praca Fishera Blacka i Myrona Scholesa (1973), której rezultatem była słynna formuła na wycenę europejskiej opcji kupna. Niedoskonałość niektórych założeń modelu, a w szczególności niezadowalające dopasowanie do obserwowanej rzeczywistości zaowocowało wieloma rozszerzeniami i modyfikacjami. Spośród nich warto wymienić model dwumianowy Coxa, Rossa i Rubinsteina (1976) oraz oparty na procesie Levy'ego model Gerbera-Shiu (1994). Eberlein i Keller (1995) pokazali, że rozkład stóp zwrotu z akcji może być dobrze przybliżony przez rozkład hiperboliczny.

Równoległe z rozwojem teoretycznych podstaw wyceny następował rozwój modeli wyceny opcji egzotycznych, czyli opcji o niestandardowych i często

skomplikowanych funkcjach wypłaty. Było to przede wszystkim podyktowane coraz większym zainteresowaniem tego typu instrumentami ze strony nabywców opcji, a także ich coraz bardziej wyszukanyymi potrzebami.

Celem pracy jest przedstawienie jednego ze sposobów podejścia do wyceny niestandardowej opcji, mającej zabezpieczyć długą pozycję wynikającą z inwestycji na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Jest nim barierowa opcja na indeks WIG20 z barierą opisaną przez funkcję nieliniową. Aby uzyskać możliwie wysoki stopień zgodności z rzeczywistością, zdefiniowanie procesu kształtującego cenę indeksu WIG20 oparto na badaniach empirycznych potwierdzonych wieloma testami statystycznymi. Ze względu na złożoność funkcji wypłaty opcji oraz skomplikowane założenia co do przyjętego procesu ceny instrumentu bazowego konieczne będzie wykorzystanie metod symulacyjnych. Posłużono się metodą Monte Carlo, z modyfikacjami mającymi na celu zwiększenie jej efektywności. Zwieńczeniem pracy jest analiza wrażliwości wyniku wyceny opcji względem przyjętych założeń. W szczególności przedstawiono wpływ, jaki na uzyskiwaną cenę kontraktu opcyjnego wywiera odstępstwo od klasycznych założeń dotyczących procesu stochastycznego generującego cenę instrumentu podstawowego.

Opcje egzotyczne

Opcję można zdefiniować najogólniej jako swoistą umowę między wystawcą a nabywcą, na mocy której nabywca zyskuje prawo zakupu od wystawcy lub

sprzedania mu określonej z góry ilości danego instrumentu finansowego lub towaru po ustalonej cenie i w oznaczonym okresie. Cechą, która różni opcje od większości innych instrumentów terminowych (np. kontraktów *futures*), jest to, że daje ona nabywcy prawo, natomiast nie obarcza go obowiązkiem. Tak więc nabywca opcji w terminie jej wykonania może albo wykorzystać, albo pozwolić na samoistne wygaśnięcie ważności opcji. Inaczej ma się rzecz z wystawcą opcji, na którym ciąży obowiązek sprzedaży jego posiadaczowi lub odebrania od niego określonej w kontrakcie ilości danego instrumentu podstawowego po określonej cenie.

Różnorodność opcji i instrumentów wywodzących się od opcji sprawia, że można je sklasyfikować na wiele sposobów, biorąc pod uwagę różne kryteria. Od lat siedemdziesiątych XX wieku, kiedy w Stanach Zjednoczonych pojawiły się pierwsze tego typu instrumenty, sensowny stał się podział opcji na standardowe, nazywane w żargonie finansowym waniliowymi (*vanilla*, *plain vanilla*), oraz egzotyczne (*exotic*), zwane też butikowymi (*boutique*) lub konstruktorskimi (*designer*).

Opcje egzotyczne były odpowiedzią na rosnące zapotrzebowanie na nowe instrumenty finansowe dostosowane do specyficznych potrzeb danego klienta, znacznie wykraczających poza możliwości oferowane przez wystandaryzowane opcje notowane na giełdach papierów wartościowych. Coraz bardziej skomplikowane instrumenty były początkowo replikowane syntetycznie za pomocą liniowych kombinacji opcji standardowych, jednakże nie zawsze było to możliwe w przypadku bardziej skomplikowanych kontraktów. Ponadto taka replikacja często okazywała się bardzo kosztowna. Tak narodziła się inżynieria finansowa i opcje egzotyczne, które były nie tylko lepiej dopasowane do indywidualnych potrzeb inwestorów, lecz także okazały się relatywnie tańsze w porównaniu z kombinacjami instrumentów standardowych.

Cechą charakterystyczną każdą opcję bez względu na jej typ jest funkcja wypłaty. Określa ona kwotę, jaką otrzymuje nabywca danej opcji w momencie jej wykonania. Funkcja wypłaty może mieć różną postać; może być bardzo skomplikowana dla niektórych opcji egzotycznych oraz prosta w przypadku opcji waniliowych. Przykładowo, funkcje wypłaty dla standardowych opcji kupna i sprzedaży wyrażają się wzorami:

$$f^C(t) = (P(t) - K)^+, \\ f^P(t) = (K - P(t))^+,$$

gdzie:

$f^C(t)$ – wartość funkcji wypłaty dla opcji kupna przypadająca na jednostkę instrumentu pierwotnego w dniu jej wykonania,

$P(t)$ – cena rynkowa instrumentu bazowego w dniu wykonania opcji,

K – cena wykonania opcji,

$f^P(t)$ – wartość funkcji wypłaty dla opcji sprzedaży, przypadająca na jednostkę instrumentu pierwotnego w dniu jej wykonania,

$$(\bullet)^+ \equiv \max(\bullet, 0).$$

Obecnie mamy do czynienia z niezwykle bogactwem różnego rodzaju opcji egzotycznych o mniej lub bardziej nietypowych funkcjach wypłaty. Ze specyfiki tego typu instrumentów wynika, że nie każda zawierana transakcja opcyjna trafia do wiadomości uczestników rynku; najczęściej jest ona indywidualną i nierejestrowaną umową między wystawcą a nabywcą. Wszystkie opcje egzotyczne cechuje jednak to, że nie dadzą się one przedstawić jako kombinacja opcji waniliowych i ewentualnie instrumentów pierwotnych¹. Od lat dziewięćdziesiątych XX wieku stanowią główne wyzwanie dla banków inwestycyjnych i do dziś są w fazie ciągłego rozwoju. Przygotowanie ofert opcyjnych wymaga skomplikowanych rachunków (zwłaszcza analizy stochastycznej na zaawansowanym poziomie), a niejednokrotnie także symulacji komputerowych.

Wśród licznych rodzajów opcji egzotycznych wyróżnić można klasę opcji zależnych od trajektorii (*path-dependent options*), których funkcja wypłaty zależy nie tylko od ceny instrumentu podstawowego w terminie wykonania, ale także od ceny tego instrumentu w innych momentach okresu ważności opcji. Jedną z podklas opcji zależnych od trajektorii są opcje barierowe (*barrier options*). Wartość ich funkcji wypłaty uzależniona jest od przekroczenia (lub osiągnięcia) z góry określonej bariery w czasie trwania kontraktu.

Istnieje wiele podtypów opcji barierowych, w szczególności:

- bariera może być zdefiniowana przez funkcję nieliniową (*curvilinear barrier options*),
- bariera może obowiązywać jedynie na części okresu ważności opcji (*partial barrier options*),
- barier może być kilka (*multiple barrier options*),
- mogą istnieć dwie bariery – jedna wyższa, a druga niższa od bieżącej ceny instrumentu podstawowego (*corridor barrier options*).

Ponadto, opcje barierowe można sklasyfikować ze względu na wiele innych kryteriów. W szczególności może to być:

- typ opcji:
- opcje *out* (*knock-out*) – tracą wartość po osiągnięciu bariery,
- opcje *in* (*knock-in*) – dopiero po osiągnięciu bariery nabierają wartości;
- położenie bariery względem bieżącej ceny instrumentu bazowego:

¹ W literaturze związanej z tematem brak jest jednomyślności co do definicji opcji egzotycznych. Niektórzy autorzy zaliczają do nich także tzw. pakiety (*packages*), czyli portfele składające się ze standardowych europejskich opcji kupna i sprzedaży, kontraktów terminowych oraz instrumentów pierwotnych, a więc opcje, które mogą powstać jako replikacja instrumentów standardowych.

- opcje *down* – bariera umiejscowiona jest poniżej bieżącej ceny instrumentu podstawowego,

- opcje *up* – bariera powyżej bieżącej ceny instrumentu podstawowego.

Tabela 1 zawiera definicje funkcji wypłaty czterech podstawowych typów opcji barierowych. Przyjęto następujące oznaczenia: $H(t)$ – bariera, T – data wygaśnięcia opcji, $I(A)$ – funkcja charakterystyczna (indeksowa) zbioru A , czyli funkcja przyjmująca wartość 1, jeżeli zaszło zdarzenie A , oraz wartość 0 w przeciwnym przypadku.

W przypadku opcji typu *in* opcja barierowa staje się więc opcją waniliową z chwilą osiągnięcia bariery, natomiast dla opcji typu *out* opcja barierowa jest równoważna analogicznej opcji waniliowej do momentu osiągnięcia bariery. Niepewność związana z przekroczeniem bądź nieprzekroczeniem bariery sprawia, że opcje barierowe są tańsze od odpowiadających im opcji europejskich i w związku z tym dają lepsze możliwości spekulacji uczestnikom skłonny podjąć dodatkowe ryzyko.

Proces ceny instrumentu podstawowego

Standardowym procesem stochastycznym wykorzystywanym do opisu ruchu cen akcji jest geometryczny ruch Browna, zdefiniowany przez stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma P(t)dB(t),$$

gdzie:

$P(t)$ – cena akcji w chwili t ,

μ – dryf,

σ – zmienność ceny akcji,

$\{B(t)\}_{t \geq 0}$ – standardowy proces Browna.

Opisany proces został po raz pierwszy użyty do modelowania ewolucji cen papierów wartościowych przez Osborne'a (1959). Jedną z własności tak zdefiniowanego procesu jest normalność jego przyrostów, którymi w przypadku akcji są logarytmiczne stopy zwrotu.

Empiryczne stopy zwrotu częściej przyjmują jednak wartości zbliżone do średniej oraz wartości znacznie od niej oddalone, niż wynikałoby to z rozkładu nor-

malnego. Prawdopodobieństwo ta jest charakterystyczna dla większości stóp zwrotu z instrumentów finansowych i nosi nazwę zjawiska leptokurtozy. Ponadto rozkłady empirycznych stóp zwrotu charakteryzują się skośnością. Eberlein i Keller (1995) pokazali, że bardzo dobre wyniki w aproksymacji empirycznych stóp zwrotu można uzyskać wykorzystując rozkłady hiperboliczne.

Rozkłady hiperboliczne charakteryzują się tym, że wykres logarytmu ich funkcji gęstości jest hiperbolą. Z uwagi na fakt, że w przypadku rozkładu normalnego analogiczny wykres tworzy parabolę, można oczekiwać, że rozkład hiperboliczny będzie znacznie lepiej opisywał grube ogony niż rozkład gaussowski.

Funkcję gęstości zmiennej losowej o rozkładzie hiperbolicznym wyraża się wzorem:

$$\text{hyp}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu))$$

gdzie K_1 oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela trzeciego rodzaju z indeksem 1.

Otrzymano następujące wartości parametrów rozkładu hiperbolicznego uzyskane metodą największej wiarygodności: $\alpha = 72,498$, $\delta = 0,0112$, $\beta = 3,064$, $\mu = -0,0013^2$.

W celu zorientowania się, czy rozkład hiperboliczny dobrze opisuje rozkład stóp zwrotu z indeksu WIG20, można posłużyć się QQ-plotem. Przy idealnym dopasowaniu danych empirycznych do modelu QQ-plot jest linią prostą o nachyleniu 45 stopni.

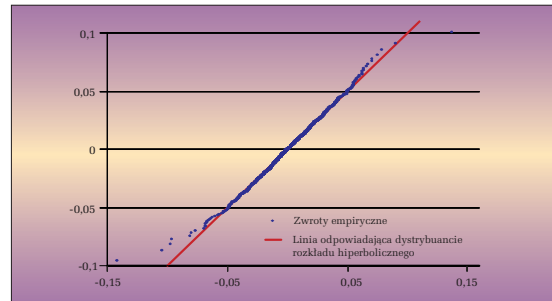
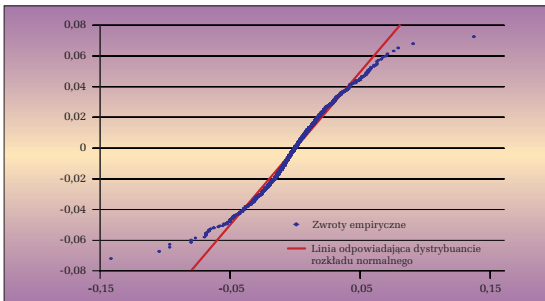
Na wykresie 1 widoczne jest wyraźne odchylenie zwrotów empirycznych od teoretycznych wartości rozkładu normalnego. Nachylenie wykresu przy skrajnych obserwacjach jest znacznie mniejsze niż na obszarach środkowych, co spowodował fakt, że dystrybuanta empiryczna zawiera większą masę prawdopodobieństwa na obszarach znacznie oddalonych od mediany niż dopasowana do niej dystrybuanta rozkładu normalnego. Odchylenie wykresu od linii prostej dla wartości wokół mediany wynika natomiast z faktu, że środkowy obszar wykresu empirycznej funkcji prawdopodobieństwa jest

² Do estymacji parametrów rozkładu hiperbolicznego na podstawie stóp zwrotu z indeksu WIG20 użyto programu komputerowego 'hyp' opracowanego przez pracowników Uniwersytetu w Aarhus (opis programu w: P. Blæsild, M. K. Sørensen, 1992).

Tabela 1 Funkcje wypłaty standardowych opcji barierowych

Typ opcji	Funkcja wypłaty
<i>down-and-out</i>	$(P(T) - K)^+ I(\{\min_{0 \leq t \leq T} P(t) \geq H(t)\})$
<i>down-and-in</i>	$(P(T) - K)^+ I(\{\min_{0 \leq t \leq T} P(t) \leq H(t)\})$
<i>up-and-out</i>	$(P(T) - K)^+ I(\{\max_{0 \leq t \leq T} P(t) \leq H(t)\})$
<i>up-and-in</i>	$(P(T) - K)^+ I(\{\max_{0 \leq t \leq T} P(t) \geq H(t)\})$

Wykres 1. QQ-plot dziennych zwrotów z indeksu WIG20 dla rozkładu normalnego i hiperbolicznego



Źródło: Opracowanie własne.

wyższy niż w przypadku analogicznej funkcji gęstości rozkładu gaussowskiego. Reasumując, wykres układa się w kształt rozciągniętej litery „S”, co jest charakterystyczne dla wzorcowych dystrybucji rozkładów opisujących w niezadowalający sposób zjawisko leptokurtozy. Analogiczny wykres sporządzony dla rozkładu hiperbolicznego jest pozbawiony tak wyraźnych wad. Oczywiście, odchylenia od wartości teoretycznych występują, jednak ich poziom wydaje się akceptowalny.

Znacznie bardziej formalnymi metodami badania jakości dopasowania rozkładu teoretycznego do danych empirycznych są tzw. testy zgodności (tabela 2). Przy poziomie istotności 0,01 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o hiperbolicznym rozkładzie stóp zwrotu. W przypadku rozkładu normalnego, przy tym samym poziomie istotności odrzucamy hipotezę zerową i wnioskujemy, że rozkład stóp zwrotu wykazuje statystycznie istotne odchylenia od rozkładu normalnego. W celu porównania jakości dopasowania rozkładów w okolicach wartości ekstremalnych można posłużyć się statystyką Andersona-Darlinga (1952). Jest ona ważoną wersją statystyki testu Kołmogorowa, nadającą największe wagi obserwacjom ekstremalnym. Ponieważ mniejsza wartość statystyki AD_n oznacza lepsze dopasowanie rozkładu do danych, wnioskujemy, że rozkład hiperboliczny lepiej modeluje skrajne wartości stóp zwrotu niż rozkład normalny.

Rozkład hiperboliczny należy do klasy rozkładów nieskończenie podzielnych, co zostało udowodnione przez Barndorffa-Nielsen oraz Halgreena (1977). Wobec uzyskanych wyników, naturalną alternatywą dla

geometrycznego ruchu Browna jest więc proces określony przez stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma P(t)dL(t),$$

gdzie $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ jest hiperbolicznym ruchem Lévy'ego, czyli takim procesem o przyrostach stacjonarnych i niezależnych, że $L(0) = 0$, $D^2\{L(1)\} = 1$ oraz $\ln\{L(1)\}$ ma scentrowany i symetryczny rozkład hiperboliczny. Korzystając z lematu Itô dla procesów Lévy'ego, można pokazać, że rozwiązaniem powyższego równania jest proces:

$$P(t) = P(0)\exp(\sigma L(t) + \mu t) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \sigma \Delta L(s)) \exp(-\sigma \Delta L(s)),$$

gdzie $\Delta L(s)$ oznacza skok procesu w chwili s . Tak zdefiniowany model ma tę pożądaną właściwość, że uzyskiwane z niego logarymiczne stopy zwrotu mają rozkład hiperboliczny. Eberlein i Keller (1995) pokazali, że na jego podstawie można wyprowadzić wzory na wycenę europejskich opcji waniliowych.

W wersji dyskretniej proces ceny instrumentu podstawowego w chwili t można zdefiniować równaniem:

$$P(t) = P(t-k) \exp\left(\sum_{i=1}^k \text{Hyp}_i\right),$$

gdzie Hyp_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie hiperbolicznym określonym przez funkcję gęstości $\text{hyp}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$, oszacowaną na podstawie dziennych stóp zwrotu. Otrzymany wzór można wykorzystać do generowania trajektorii procesu ceny instru-

Tabela 2 Wyniki testów zgodności przy poziomie istotności 0,01

Test	Rozkład	Wartość obliczona	Wartość krytyczna
χ^2 Pearsona	hiperboliczny	43,96	52,19
	normalny	110,02	54,78
Kołmogorowa	hiperboliczny	0,849	1,63
	normalny	2,265	1,63
Andersona-Darlinga	hiperboliczny	0,077	-
	normalny	0,134	-

Źródło: obliczenia własne.

mentu podstawowego o stopach zwrotu o rozkładzie hiperbolicznym.

Wycena opcji – podejście symulacyjne

Załóżmy, że pewien inwestor postanowił ulokować część swoich środków na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, kupując portfel złożony z akcji spółek o największej kapitalizacji lub nabywając jednostki indeksowe na WIG20³. Inwestycja ma trwać 1 rok, co odpowiada 261 dniom roboczym, podczas których odbywają się sesje na warszawskim parkiecie. Aby uchronić się przed dużymi stratami, inwestor pragnie zabezpieczyć otwartą pozycję przez zakup opcji, która zostanie skonstruowana na podstawie następujących danych:

- opcja ma zrekompensować stratę wynikającą z nieosiągnięcia po upływie roku stopy zwrotu z inwestycji równej co najmniej stopie wolnej od ryzyka r , która może być utożsamiana z rentownością bonów lub obligacji skarbowych;

- osiągnięcie przez indeks WIG20 poziomu odpowiadającego stopie zwrotu z inwestycji równej r_m w skali roku oznacza natychmiastową realizację zysków przez inwestora i wycofanie się z rynku;

- horyzont inwestycyjny wynosi co najmniej pół roku, czyli 130 dni roboczych.

Oczywiście, wyżej zdefiniowaną pozycję można zabezpieczyć waniliową opcją sprzedaży o cenie wykonania K równej:

$$K = P(0)(1 + r),$$

gdzie $P(0)$ jest wartością indeksu WIG20 w dniu wejścia na rynek inwestora, czyli w dniu zakupu jednostek indeksowych na WIG20. Wcześniejsze wycofanie się inwestora z rynku oznaczałoby jednak, że opcja ta zabezpiecza pozycję już zamkniętą. Zasadne jest więc skonstruowanie takiej opcji, która traciłaby swoją ważność z chwilą realizacji zysków przez inwestora, a przez to byłaby tańsza od waniliowej opcji sprzedaży.

Do rozwiązania tego typu problemu doskonale nadają się opcje barierowe. Zdefiniujmy barierę jako następującą funkcję czasu:

$$H(t) = P(0) \left(1 + 2 \left(t + \left[\frac{t-1}{5} \right] \right) \frac{r_m}{365} \right)$$

gdzie: $t = 131, 132, \dots, 261$, natomiast $[x]$ jest częścią całkowitą liczby x . Dla uproszczenia pominięto wpływ dni świątecznych, tak więc zawsze po 5 dniach roboczych następują 2 dni wolne oraz $t = 0$ odpowiada poniedziałkowi.

Przekroczenie przez indeks WIG20 tak zdefiniowanej bariery oznacza, że zamykający w tym momencie

swoją pozycję inwestor, który w $t = 0$ zakupił jednostki indeksowe na WIG20, zrealizuje zysk odpowiadający stopie r_m w skali rocznej, przy czasie trwania inwestycji równym co najmniej pół roku. Odpowiada to zdefiniowanym uprzednio kryteriom.

Odpowiednia opcja zabezpieczająca otwartą pozycję w jednostkach indeksowych na WIG20 będzie opcją barierową typu *up-and-out*, czyli tracącą wartość po wzroście indeksu WIG20 powyżej bariery. Bariera ustawiona jest tylko na części okresu ważności opcji i określona przez funkcję nieciągłą; w szczególności nie jest ona funkcją stałą, jak w przypadku standardowych opcji barierowych. Funkcja wypłaty f_T rozpatrywanego kontraktu jest więc dana wzorem

$$f_T = (K - P(T))^+ \mathbf{I}(\{ \bigwedge_{t_1 \leq t \leq t_2} P(t) \leq H(t) \})$$

gdzie $t_1 = 131$ i $t_2 = 261$.

Wycena opcji na moment t polega na wyliczeniu warunkowej wartości oczekiwanej zdyskontowanej funkcji wypłaty w momencie wygaśnięcia opcji względem pewnej miary martyngałowej Q , czyli takiej miary, dla której zdyskontowany proces ceny instrumentu podstawowego jest martyngałem. Można to zapisać w postaci:

$$V(t) = \Lambda_t E^Q(\Lambda_T^{-1} f_T | F_t)$$

gdzie:

$V(t)$ – cena opcji w momencie t ,

Λ_t – współczynnik oprocentowujący (dla kapitalizacji ciągłej $\Lambda_t = e^{rt}$),

F_t - tzw. filtracja, czyli historia realizacji procesu do momentu t (por. Baxter, Rennie, 1996).

Dla $t = 0$ wzór upraszcza się do postaci:

$$V(0) = E^Q(\Lambda_T^{-1} f_T)$$

gdyż dla filtracji F_0 , a więc na początku procesu, warunkowa wartość oczekiwana jest równoważna zwykłej wartości oczekiwanej.

Ze względu na dosyć skomplikowaną postać funkcji wypłaty analityczne wyliczenie powyższej formuły byłoby zadaniem trudnym nawet przy założeniu, że proces ceny instrumentu podstawowego jest opisany przez geometryczny ruch Browna. Przyjęcie modelu zakładającego hiperboliczny rozkład stóp zwrotu dodatkowo komplikuje problem w zakresie znalezienia równoważnej miary martyngałowej Q . Ze względu na powyższe uwagi analityczne rozwiązanie szukanej formuły wyceny opcji jest zadaniem nie tylko czasochłonnym, lecz także mogłoby nie zakończyć się powodzeniem. Przybliżony wynik można jednak uzyskać z zadowalającą dokładnością dzięki symulacjom komputerowym.

Najpopularniejszą metodą symulacyjną wykorzystywaną przy wycenie opcji egzotycznych jest metoda

³ Jednostka indeksowa na WIG20 (tzw. mini WIG20) jest instrumentem, którego notowania na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych odpowiada 10% wartości indeksu WIG20.

Monte Carlo. Procedura ta znajduje zastosowanie przede wszystkim przy szacowaniu wielkości, które da się przedstawić w postaci wartości oczekiwanych pewnych rozkładów prawdopodobieństwa, a których postać sprawia, że osiągnięcie analitycznego rozwiązania byłoby bardzo trudne bądź niemożliwe w rozsądnym wymiarze czasowym. Z uwagi na fakt, że cena opcji wyraża się poprzez wartość oczekiwaną zdyskontowanych wypłat względem pewnej miary martyngałowej, metoda Monte Carlo może zostać zastosowana do wyceny opcji.

W przypadku opcji zmienną losową, której wartość oczekiwaną chcemy oszacować jest zdyskontowana wartość wypłaty na koniec ważności opcji. Funkcja wypłaty dla uprzednio zdefiniowanej opcji zależy nie tylko od ceny instrumentu podstawowego w momencie jej wygaśnięcia, lecz także od wartości, które mini-WIG20 przyjmuje w czasie ważności opcji. Konieczna jest więc symulacja wartości indeksu WIG20 dla całego okresu od 0 do T , czyli generowanie N trajektorii WIG20. Wartość oczekiwaną dochodu uzyskanego z tytułu posiadania opcji w momencie T można oszacować za pomocą formuły:

$$\bar{f}_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_T^i$$

gdzie f_T^i – wartość funkcji wypłaty w momencie wygaśnięcia kontraktu opcyjnego dla i -tej wygenerowanej trajektorii. Przy założeniu neutralności względem ryzyka, sprawiedliwą wartość opcji na moment 0 otrzymujemy, dyskontując wartość oczekiwaną funkcji wypłaty stopą procentową wolną od ryzyka. Uzyskane metodą symulacyjną przybliżenie ceny opcji wyraża się więc wzorem:

$$V(0) = \frac{1}{1+r} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_T^i \right]$$

Cena instrumentu podstawowego określona jest przez proces stochastyczny o przyrostach będących niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie hiperbolicznym. Aby wygenerować trajektorię tak zdefiniowanego procesu, należy więc wygenerować ciąg niezależnych liczb o rozkładzie hiperbolicznym. Ponieważ dystrybuanta F zmiennej losowej X określonej przez funkcję gęstości $hyp(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$ jest funkcją ciągłą i ściśle rosnącą, zmienna losowa $U = F(X)$ ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Dysponując generatorem liczb losowych o takim rozkładzie, przez przekształcenie:

$$X = F^{-1}(U)$$

można więc otrzymać liczby losowe o rozkładzie hiperbolicznym (por. Zieliński, 1970).

Funkcja pierwotna względem funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu hiperbolicznego nie da się przedstawić poprzez funkcje elementarne.

W związku z tym dystrybuantę rozkładu hiperbolicznego dla poszczególnych punktów R_i można otrzymać tylko w sposób numeryczny, rozwiązując formułę:

$$F(R_i) = \int_{-\infty}^{R_i} hyp(u, a, b, d, m) du$$

Na podstawie liczb pseudolosowych z przedziału $(0, 1)$ i uzyskanej w sposób numeryczny dystrybuanty rozkładu hiperbolicznego można wygenerować ciąg stóp zwrotu o rozkładzie hiperbolicznym. Znacząc więc wartość indeksu WIG20 na początku życia opcji, można uzyskać symulacyjnie losowe trajektorie wartości instrumentu podstawowego w całym okresie ważności kontraktu opcyjnego.

Wygenerowano przykładowe trajektorie procesu ceny indeksu WIG20 dla $P(0) = 1500$ i $T = 261$. Na wykresie 2 przedstawiono przypadek ilustrujący wpływ bariery na wartość wypłaty w momencie wygaśnięcia kontraktu opcyjnego. W momencie T wartość indeksu WIG20 jest niższa od ceny wykonania K , więc realizacja waniliowej opcji sprzedaży przynosi wypłatę równą $K - P(T)$. W chwili $t = 183$ cena instrumentu podstawowego $P(t)$ przekroczyła jednak barierę $H(t)$, wskutek czego zdefiniowana wcześniej opcja barierowa straciła wartość i w momencie T wypłata z tytułu jej wykonania wynosi 0.

Zagadnieniem typowym dla każdego eksperymentu symulacyjnego jest dokładność i wiarygodność uzyskiwanych wyników. Niezwykle ważne jest, aby otrzymane przybliżenie było możliwie mało wrażliwe na zmianę zestawu liczb losowych użytych do symulacji. W szczególności jak najmniejsze powinno być prawdopodobieństwo, że otrzymany rezultat znacznie odbiega od prawdziwej wartości.

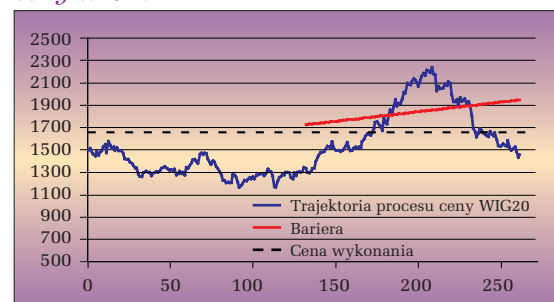
Odchylenie standardowe wypłaty uzyskanej dla pojedynczej trajektorii wygenerowanej symulacyjnie klasyczną metodą Monte Carlo wynosi:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f_T^i - \bar{f}_T)^2}$$

Dla dużych N można przyjąć, że $N - 1 \approx N$, więc statystyka:

$$\frac{\bar{f}_T - E(f_T)}{\frac{s}{\sqrt{N}}}$$

Wykres 2 Przykładowa trajektoria procesu ceny WIG20



Źródło: Opracowanie własne.

ma graniczny standardowy rozkład normalny. Korzystając z tej zależności, można wyznaczyć przedział ufności dla szukanej wartości oczekiwanej (por. Boyle, 1977).

Odchylenie standardowe \bar{f}_T jest odwrotnie proporcjonalne do \sqrt{N} , w związku z czym najprostszą metodą redukcji długości przedziału ufności jest wygenerowanie dodatkowych trajektorii. Jednak aby zmniejszyć odchylenie standardowe dziesięciokrotnie, konieczne jest wykonanie sto razy większej liczby symulacji, co sprawia, że klasyczny eksperyment Monte Carlo jest mało efektywny. Alternatywne podejścia koncentrują się na zmniejszeniu s i noszą nazwę technik redukcji wariancji (*variance reduction techniques*).

Jedną z nich jest tzw. metoda odbić lustrzanych (*antithetic variate method*; por. Koch, 1994), wykorzystująca ujemną korelację między parami wyników symulacji. Polega ona na dwukrotnym zwiększeniu liczby symulacji poprzez wykorzystanie wygenerowanych już liczb pseudolosowych. Jeżeli do uzyskania N wartości wykorzystano ciąg niezależnych liczb losowych u_1, u_2, \dots, u_{k-N} o jednakowym rozkładzie równomiernym na przedziale $(0, 1)$, do wygenerowania kolejnych N realizacji używamy ciągu $(1 - u_1), (1 - u_2), \dots, (1 - u_{k-N})$, gdzie k oznacza liczbę liczb losowych koniecznych do uzyskania jednej trajektorii. Wówczas:

$$\tilde{f}_T = \frac{1}{2}[\bar{f}_T(U) + \bar{f}_T(1-U)]$$

jest nieobciążonym estymatorem $E(f_T)$, gdzie $\bar{f}_T(U)$ oraz $\bar{f}_T(1-U)$ są estymatorami $E(f_T)$, odpowiednio dla pierwszego i drugiego zestawu liczb losowych.

Wariancja tak skonstruowanego estymatora wyraża się następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{f}_T) &= \frac{1}{4}[\text{Var}(\bar{f}_T(U)) + \text{Var}(\bar{f}_T(1-U))] \\ &+ \frac{1}{2}\text{Cov}(\bar{f}_T(U), \bar{f}_T(1-U)) \end{aligned}$$

Jest ona zatem mniejsza od wariancji estymatora \bar{f}_T opartego na identycznej liczbie symulacji, jeżeli tylko $\bar{f}_T(U)$ oraz $\bar{f}_T(1-U)$ są ujemnie skorelowane. Warunkiem wystarczającym, aby $\text{Cov}(\bar{f}_T(U), \bar{f}_T(1-U)) < 0$ jest monotoniczność i niestałość funkcji \bar{f}_T względem zmiennej losowej $U = (u_1, u_2, \dots, u_{k-N})$.

Przeprowadzenie formalnego dowodu nie jest w tym przypadku konieczne, ponieważ istnieją intuicyjne przesłanki wskazujące na monotoniczność funkcji \bar{f}_T . Im niższe liczby u_1, u_2, \dots, u_{k-N} zostaną wygenerowane, tym niższe stopy zwrotu otrzymamy. Skutkuje to mniejszym prawdopodobieństwem przekroczenia bariery i jednocześnie wyższą wartością funkcji wypłaty w momencie wygaśnięcia opcji. Stosując metodę odbić lustrzanych, można więc spodziewać się znacznej poprawy jakości oszacowania w porównaniu z estymatorem opartym na niezależnej próbie.

Wyniki symulacji

Na podstawie zestawu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$ wygenerowano 50 tys. wartości funkcji wypłaty na koniec okresu ważności opcji. Następnie użyto odbić lustrzanych tych samych liczb (czyli liczb o przeciwnym znaku, powiększonych o 1) do wygenerowania kolejnych 50.000 wypłat. Dla danego zestawu zmiennych wejściowych uzyskana cena opcji jest więc średnią ze 100.000 obserwacji. Symulację przeprowadzono dla różnych poziomów wolnej od ryzyka stopy rynkowej r oraz stopy zwrotu z inwestycji powodującej realizację zysków przez inwestora r_m (tabela 4).

Zastosowanie metody odbić lustrzanych wydatnie zwiększyło efektywność uzyskanych estymatorów. Pozwoliła ona na zmniejszenie standardowego błędu oszacowania o 22% - 34% w przypadku wyceny zdefiniowanej uprzednio opcji barierowej, oraz aż o 34% - 44% dla analogicznej opcji bez bariery. W rezultacie otrzymujemy przybliżone przedziały ufności nieprzekraczające 1,6% dla opcji z barierą oraz 1,2% dla opcji waniliowej.

Wzrost efektywności estymatora ceny opcji przy zastosowaniu metody odbić lustrzanych jest wynikiem ujemnej korelacji między realizacjami procesu w momencie T . Korelacja ta, mierzona współczynnikiem korelacji liniowej Pearsona, wynosi około -0,5 dla opcji barierowej oraz około -0,6 dla opcji waniliowej. Widać więc, że mimo doskonale ujemnej korelacji między zmiennymi losowymi U i $1 - U$ właściwość ta nie jest zachowana dla uzyskiwanych zmiennych wyjściowych. Można to wytłumaczyć faktem, że powstają one wskutek przekształcenia zmiennych o rozkładzie jednostajnym w zmienne o zupełnie innym rozkładzie⁴. Ujemne skorelowanie zmiennych wyjściowych jest jednak na tyle silne, że zastosowanie metody odbić lustrzanych można uznać za uzasadnione.

Jednym z parametrów decydujących o cenie opcji jest położenie bariery. Im bliżej położona bariera, tym większe prawdopodobieństwo jej przekroczenia, co w rezultacie daje niższą oczekiwaną wartość wypłaty w momencie T . Opcja barierowa pozwala więc zmniejszyć koszt zabezpieczenia otwartej pozycji w porównaniu z opcją bez bariery, czyli opcją waniliową.

Należy zauważyć, że nawet opcja z barierą odpowiadającą $r_m = 20\%$ jest stosunkowo droga w stosunku do chronionego kapitału. Zabezpieczenie jednostki kapitału zainwestowanego np. w miniWIG20 wymaga poniesienia kosztu równego ponad 10%. Opcja nie rekompensuje więc w pełni strat poniesionych na skutek słabej koniunktury na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, lecz jedynie je ogranicza. Bez względu

⁴ Wskutek przyjętych założeń o procesie kształtującym cenę WIG20, zmienne wyjściowe symulacji mają rozkład logarytmiczny hiperboliczny, czyli logarytm zmiennej wyjściowej ma rozkład hiperboliczny.

Tabela 3 Wyniki symulacji dla rozkładu normalnego i hiperbolicznego oraz różnych poziomów r i r_{max}

r (w %)	r_{max} (w %)	cena opcji (w %)	Rozkład normalny		współczynnik korelacji
			błąd – trajektorie niezależne (w %)	błąd – metoda odbić lustrzanych (w %)	
6,00	20,00	10,52	0,052	0,040	-0,4148
6,00	30,00	11,18	0,052	0,038	-0,4680
6,00	40,00	11,77	0,052	0,036	-0,5152
6,00	brak	12,54	0,051	0,033	-0,5979
8,00	20,00	11,04	0,053	0,040	-0,4310
8,00	30,00	11,80	0,053	0,038	-0,4927
8,00	40,00	12,41	0,053	0,036	-0,5399
8,00	brak	13,33	0,053	0,032	-0,6385
10,00	20,00	11,68	0,054	0,041	-0,4454
10,00	30,00	12,37	0,055	0,038	-0,5140
10,00	40,00	13,02	0,055	0,036	-0,5665
10,00	brak	14,09	0,054	0,030	-0,6801
12,00	20,00	12,06	0,056	0,041	-0,4645
12,00	30,00	12,95	0,056	0,038	-0,5396
12,00	40,00	13,57	0,055	0,035	-0,5924
12,00	brak	14,85	0,055	0,029	-0,7183
(w %)	r_{max} (w %)	cena opcji (w %)	błąd – trajektorie niezależne (w %)	błąd – metoda odbić lustrzanych (w %)	współczynnik korelacji
6,00	20,00	10,15	0,051	0,040	-0,3947
6,00	30,00	10,75	0,051	0,038	-0,4451
6,00	40,00	11,33	0,051	0,037	-0,4875
6,00	brak	12,14	0,051	0,033	-0,5694
8,00	20,00	10,63	0,052	0,040	-0,4117
8,00	30,00	11,43	0,053	0,038	-0,4698
8,00	40,00	11,95	0,053	0,037	-0,5154
8,00	brak	12,91	0,052	0,033	-0,6105
10,00	20,00	11,34	0,054	0,040	-0,4599
10,00	30,00	11,97	0,054	0,038	-0,4951
10,00	40,00	12,59	0,054	0,037	-0,5423
10,00	brak	13,60	0,053	0,031	-0,5918
12,00	20,00	11,58	0,055	0,041	-0,4421
12,00	30,00	12,51	0,055	0,038	-0,5138
12,00	40,00	13,09	0,055	0,036	-0,5653
12,00	brak	14,36	0,054	0,030	-0,6882

Źródło: obliczenia własne.

na rozwój wypadków na polskim rynku kapitałowym, przy $r = 8\%$ inwestor nie straci więcej niż $3,5\%$ ⁵ kwoty zainwestowanej w jednostki indeksowe na WIG20 i ich zabezpieczenie opcją z barierą odpowiadającą $r_m = 20\%$. Jednocześnie nie pozbawia się możliwości osiągnięcia zysku w przypadku hossy na warszawskim parkiecie, w czym też objawia się większa atrakcyjność opcji w porównaniu np. z kontraktami *futures*.

Opierając się na przeprowadzonych testach statystycznych przyjęliśmy, że proces stochastyczny gene-

rujący cenę indeksu WIG20 oparty jest na przyrostach o rozkładzie hiperbolicznym. Należy się spodziewać, że przyjęcie takiego założenia może mieć znaczny wpływ na cenę opcji. W szczególności otrzymane wyniki powinny różnić się od rezultatów uzyskanych przy przyjęciu modelu zakładającego normalność stóp zwrotu.

Na podstawie przeprowadzonej symulacji można stwierdzić, że przyjęcie klasycznego modelu opartego na standardowym ruchu Browna powoduje przeszacowanie ceny opcji barierowej o ponad 3% w porównaniu z modelem bardziej realistycznym, w sensie dopasowania do danych empirycznych, zakładającym hi-

⁵ Jest to wynikiem następującego rachunku: $(1 + 8\%) \cdot (1 - 10,63\%) - 1 = -3,5\%$.

perboliczny rozkład stóp zwrotu. Nie jest to zaskoczeniem w przypadku opcji z barierą z uwagi na fakt, że model hiperboliczny częściej dopuszcza znaczne skoki cen („grube ogony”), przez co prawdopodobieństwo przekroczenia bariery i w rezultacie utraty wartości przez opcję jest relatywnie większe.

Okazuje się jednak, że także opcja waniliowa jest tańsza przy założeniu, że stopy zwrotu z indeksu WIG20 mają jednakowy rozkład hiperboliczny. Jest to zgodne z wynikami otrzymanymi przez Eberleina i Kellera (1995) i może być wyjaśnione przez większą koncentrację wokół mediany („wysoki szczyt”) rozkładu hiperbolicznego w porównaniu z rozkładem normalnym, a więc większe prawdopodobieństwo wystąpienia niewielkiego wahnięcia ceny.

* * *

Na podstawie uzyskanych w pracy wyników można stwierdzić, że znacznie bardziej realistyczne od klasycznego założenia o normalności stóp zwrotu z indeksu WIG20 jest przyjęcie, że mają one rozkład hiperboliczny. Fakt ten znajduje potwierdzenie w wynikach statystycznych testów zgodności dopasowania. Zastosowanie metody symulacyjnej nie tylko umożliwia uwzględnienie powyższych wniosków, lecz także prowadzi do uzyskania oszacowania ceny opcji z zadowalającym przybliżeniem. Można się przekonać, że przyjęcie klasycznych założeń prowadzi do dosyć wyraźnego przeszacowania rzeczywistej wartości opcji.

Literatura

1. T.W. Anderson, D.A. Darling: *Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes*. Annual of Mathematical Statistics nr 23/1952, s. 193-212.
2. O.E. Barndorff-Nielsen, O. Halgreen: *Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. nr 38/1977, s. 309-312.
3. O.E. Barndorff-Nielsen: *Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae*. "Scandinavian Journal of Statistics" nr 5/1978, s. 151-157.
4. M. Baxter, A. Rennie: *Financial calculus. An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, Cambridge 1999.
5. F. Black, M. Scholes: *The pricing of options and corporate liabilities*. "Journal of Political Economy" nr 81/1973, s. 637-654.
6. P. Blæsild: *Hyperbolic distributions: cumulants, skewness and kurtosis*. Research Report No. 209, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus, Aarhus 1990.
7. P. Blæsild, M.K. Sørensen: *'hyp' – a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution*. Research Report No. 248, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus, Aarhus 1992.
8. P. Boyle: *A Monte Carlo approach to options*. "Journal of Financial Economics" nr 4/1977, s. 323-338.
9. J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein: *Option pricing: A simplified approach*. "Journal of Financial Economics" nr 7/1979, s. 229-263.
10. W. Dębski: *Rynek finansowy i jego mechanizmy*. Warszawa 2001 PWN.
11. E. Eberlein, U. Keller: *Hyperbolic distributions in finance*. "Bernoulli" nr 1/1995, s. 281-299.
12. E.F. Fama: *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. "Journal of Finance" nr 25/1970, s. 383-416.
13. W. Feller: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Tom II, Warszawa 1978 PWN.
14. H. Gerber, E. Shiu: *Option pricing by Esscher transforms*. "Transactions of the Society of Actuaries" nr 46/1994, s. 51-92.
15. J. Geweke: *Monte Carlo Simulation and numerical integration*. Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minneapolis 1995.
16. B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov: *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley Press, Cambridge 1954.
17. J.D. Hamilton: *Time series analysis*. Princeton University, Princeton 1994.
18. J. Hull: *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River 2000.
19. M.G. Kendall: *The Advanced Theory of Statistics*. C. Griffin & Co., London 1948.
20. B.H. Koch: *Effiziente Simulation in komplexen stochastischen Modellen: Dimensionierung des Simulationsumfangs unter taktischen Aspekten*. Hochschule St. Gallen, St. Gallen 1994.

21. W. Kryszicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*. Część I i II. Warszawa 1999 PWN.
22. U. Küchler, K. Neumann, M. Sørensen, A. Streller: *Stock returns and hyperbolic distributions*. Preprint, Humboldt University, Berlin 1994.
23. S.N. Neftci: *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. Academic Press, San Diego 2000.
24. I. Nenkin (red.): *The handbook of exotic options. Instruments, analysis and applications*. IRWIN Chicago 1996.
25. M.F. Osborne: *Brownian motion in the stock market*. "Operations Research" nr 7/1959, s. 145-173.
26. M. Overhaus, O. Brockhaus, A. Ferraris, C. Gallus, D. Long, R. Martin: *Modelling and hedging equity derivatives*. RISK Books, London 1999.
27. L.H. Summers: *Does the Stock market Rationally Reflect Fundamental Values?* "Journal of Finance" nr 3/1986, s. 591-603.
28. A. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych, Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*. Warszawa 1999 WNT.
29. R. Zieliński: *Metody Monte Carlo*. Warszawa 1970 PWN.